

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest



Tisztelettel

Höförszén Dr. Kósa András
a Gyermekek.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

N-SZEMÉLYES MINŐSÉGI DIFFERENCIÁLJÁTÉKOK KÉSLELTETÉSEL
ÉS KÉSLELTETÉS NÉLKÜL

Írta: Lipcsey Zsolt

Egyetemi doktori dolgozat

Témavezető: Dr. Kósa András

Tanulmányok 66/1977.

A kiadásért felelős:

DR VAMOS TIBOR

ISBN 963 311 048 3

ISSN 0324-2951

Bevezetés.

Dolgozatunkban N -személyes Banach és Hilbert tereken lezajló késleltetett és nem késleltetett differenciáljátékok existenciaproblémáival foglalkozunk. A témaválasztás jelentőségének jobb megvilágítása érdekében először a differenciáljátékok kutatásainak néhány jellegzetességével foglalkozunk, irodalmi hivatkozások nélkül, hiszen ezek bőségesen megtalálhatók a játékok történetének leírásában.

A differenciáljátékok kutatási eredményeinek zöme kétszemélyes játékokhoz kapcsolódik. Az N -személyes játékok kutatása az 1970-es évek elejével indult meg. A kutatási eredményeket lényegében két csoportba sorolhatjuk:

1. Jellemzést ad a játékban fellépő peremértékfeladatok megoldásaira.

2. Az említett peremértékfeladatok megoldhatóságát vizsgálja.

Mint ezt a differenciáljátékok történeténél láthatjuk, a kétszemélyes és az N személyes játékok kutatásainak első lépéseit az 1. csoportba sorolhatjuk. Ennek okát könnyen megérthetjük, ha arra gondolunk, hogy a variációszámításban például mennyivel könnyebb az extrémális pályákat jellemezni, mint a megfelelő optimumfeladat megoldásnak létezését bebizonyítani.

Amellett, hogy az N -személyes játékok kutatása nem nagy multra tekint vissza, a 2. csoportba tartozó minőségi problémák vizsgálatát az is nehezíti, hogy itt elkerülhetetlenül

kooperatív minőségi játékok problémái kerülnek elő, és ez a problémamegfogalmazást igen szerteágazóvá teszi, és elbonyolítja. Ez magyarázza, hogy $N=2$ esetben minőségi problémákkal foglalkozó dolgozatok konkrét feladatokkal foglalkoznak, de legalábbis speciális dinamikájú játékokat vizsgálnak.

A két és N -személyes játékoknál találkozunk azzal a törekvéssel, hogy absztrakt tereken is vizsgáljuk őket. A játékokkal modellezett gyakorlati problémáknál ugyanis gyakran játszanak szerepet véletlen tényezők, és ilyenkor sokszor igen kézenfekvő – sőt szükséges – a fázispont helyett valószínűségi változót vizsgálni. De absztrakt tereken lezajló játékokhoz vezetnek a parciális differenciálegyenletekkel megfogalmazható játékok is.

Témaválasztásunknak e rövid történeti háttérrel való indoklása után nézzük meg röviden a dolgozat felépítését és az eredményeket:

A 0.§-ban az N -személyes differenciáljátékokat, mint speciális N -személyes klasszikus játékokat definiáljuk. Az N -személyes minőségi játékokat pedig az N -személyes differenciáljátékok egy speciális osztályaként adjuk meg, ami lehetővé teszi, hogy a klasszikus kooperatív játékok mintájára vehessünk fel az egyébként elég nehezen kezelhető problémákat.

Dolgozatunk célja, mint ezt már láttuk, egzisztenciaproblémák vizsgálata. A fellépő peremfeladatok megoldásának létezéséhez a peremtől és helytől függő feltételeket kell szabni a játék dinamikájára. Miután az általában variációs módszereken alapuló szükséges feltételek olyanok, hogy ha létezik az

adott problémának megoldása, azt egyértelműen jellemzik, kézenfekvő ezekből kiindulni. Mi az irodalomban található számos módszer közül Kraszovszkij lokális stratégiaválasztását vesszük alapul / [16] /. A módszere, ha van megoldás, azt megadja. Mi azonban azt is szeretnénk tudni, hogy az adott cél érdekében elég jó e a módszerrel hozott döntés, várható-e a megoldás létezése. Ezért az adott pontban hozott döntést minősítjük, és azt mondjuk, hogy ha tudtunk az adott cél szempontjából elég jó döntést hozni, akkor e feladat szempontjából fölényben vagyunk a többi játékoskal szemben. E minősítés alapját az képezi, hogy a szóbanforgó módszerben egy az adott ponthoz tartozó funkcionál nyeregpontja lesz a jó stratégiaválasztás. Hogy ez elég e a "nyeréshez", vagyis közelebb visz e a célhoz vagy sem, ezt a funkcionálnak nyeregpontjában felvett értéke alapján döntjük el. A dolgozatban vizsgált négyféle alapfeladatnak megfelelően négy ilyen fölényfogalmat vezetünk be az 1.§-ban, és ezek kapcsolatainak vizsgálata mellett itt vezetjük be a stratégiák lokális megválasztási szabályát is.

A 2.§-ban azt tételezzük fel, hogy egy tartomány minden pontjához megadtuk a pont egy környezetében a célunkhoz "jó-nak minősített" stratégiaválasztási szabályt. Azt a kérdést vetjük fel, hogy mely feltételek mellett adható meg minden ponthoz egyértelműen e lokális stratégiákkal összhangban levő globális stratégiaválasztási szabály úgy, hogy bármely kezdeti értékproblémának legyen megoldása? Irodalomból is ismert, hogy ez általában nem lehetséges. Szeparábilis Banach - terek esetére megfogalmazunk egy feltételt, és egy módszert is

adunk a "szabályos" halmazok bevezetésével a fenti probléma e feltétel melletti megoldására. Az egyértelműség elejtésével azonban adunk két módszert, amelyek minden olyan esetben alkalmazhatók, ha a lokális stratégiák értelmezési tartománya nyílt. A szabályos halmaz fogalmához hasonlót Brunovskij vezet be [51]-ben található dolgozatában. Az itt található jellemzéseket és konstrukciókat azonban nem említi.

A 3.§-ban bemutatott alkalmazásoknál azt mutatjuk be, hogy ha az 1.§-ban definiált "minősítő" feltételek teljesülnek a játékban szereplő peremértékprobléma célhalmazának határpontjaira, akkor az 1.§-ban megadott módszerrel felépített lokális stratégiaválasztási szabályokat összefűzve a 2.§-ben megadott módszerek közül a megfelelővel, a megfelelő feladat megoldható /azaz az elfutás, vagy elfogás megvalósul/. Ennek jelentősége kettős:

1. Exisztencia problémáknál nehéz kérdés, hogy hol kell követelményeket támasztani? Itt e kérdésre egyszerű választ adunk: elfutáshoz elegendő a célhalmaz perempontjait vizsgálnunk, elfogásnál pedig a határpontok vizsgálata biztosíthat olyan környezetet, ahonnan kiinduló játék biztosan elfogással végződik.

2. A peremer könnyen ellenőrizhető-e a feltétel? Erre is igenlő választ adhatunk, különösen Hilbert tereken és véges dimenziós tereken. Természetesen úgy értve e választ, hogy a dinamikát leíró egyenlet bonyolultságától eltekintünk.

A bebizonyított két alaptétel jelentősége az, hogy lehetővé teszi a pálya egy becslése, mint információ alapján az

elfutást illetve elfogást a megfelelő feltételek teljesülése esetén. Ezt a dolgot csak a késleltetett információjú játékokra használtuk fel, de lehetőséget ad más esetekben pontatlan információ melletti "nyerés" biztosítására.

A Hilbert terekre vonatkozó eredmények jelentősége az, hogy konvex célhalmazok esetén tisztán csak a fölénnel megadhatók a már említett elfogási-elfutási feltételek. Banach terek esetében a terek geometriája miatt még konvex célhalmazokra is geometriai jellegű megszorításokat kell tenni. Az adott feltételek élességét mutatja az utolsó két tétel, amely szerint úgy késleltetett, mint pedig nem késleltetett információjú esetben bizonyos konvex célhalmazok mellett az elfutásra adott feltétel szükséges és elegendő. Ehhez hasonló eredményeket véges dimenziós esetben Lagunov érte el, de speciális dinamikájú rendszer feltételezésével, és csak egyidejű információ mellett.

E szükséges és elegendő feltételnek érdekessége abban áll még, hogy azt bizonyítjuk be, hogy ha a K koalíciónak nincsen meg a késleltetés nélküli elfutáshoz a fölénye, akkor az $I \setminus K$ /Többiek csoportja/ koalíció számára van olyan kiindulás, hogy még késleltetett információ mellett is célhoz ér. Ha pedig a K koalíciónak nincsen meg a késleltetett információ melletti elfutáshoz szükséges fölénye, akkor az $I \setminus K$ koalíció számára van olyan kiindulás, hogy egyidejű információ mellett biztosan célhoz ér.

Végül pedig a vázolt numerikus eljárás jelentőségére hívjuk fel a figyelmet, amelynek a konvergenciáját biztosítják a §. alaptételei, és így mindegyik fent említett esetben alkalmazható és ha a megfelelő elméleti tétel szerint egy feladat

megoldható, akkor az adott numerikus eljárás egyuttal a feladatot meg is oldja.

A Hilbert tereken konvex célhalmazokkal megfogalmazott problémához még azt tesszük hozzá, hogy ezek a feladatok már magukba foglalják a klasszikus kétszemélyes üldözési elfutási játékokat is.

Ezuton szeretnék köszönetet mondani dr.Kósa Andrásnak dolgozatom elkészítésében nyújtott támogatásáért és értékes tanácsaiért.

A differenciáljátékok története.

A differenciáljátékok problémaköre az 1940-es évek végén kezdett kialakulni. A téma első dolgozata R. Isaacs nevéhez fűződik és 1951. november 17-én jelent meg /Rand Report, P-257, Games of Pursuit/. E dolgozatban szerzője még nem használja a differenciáljáték elnevezést és mint maga írja [7] dolgozatában, tartalmaz elemi hibákat.

Az 1950-es években született eredmények zömükben zárt közleményekben jelentek meg. A differenciáljáték elnevezés is ebben az időszakban alakult ki és R. Isaacs-tól származik. Ezzel magyarázható, hogy a játékok problémaköréhez tartozó különböző feladattípusokat nem különböző cikkek sorozatából szokás idézni, hanem R. Isaacs 1965-ben megjelent könyvét tekintjük kiindulási irodalomnak /ld [6] /. A szerző ebben összefoglalja korábbi próbálkozásait és szép rendszerben sok megoldatlan megfogalmazott problémát ad közre természetesen saját eredményei mellett. A könyv nagy jelentősége abban áll, hogy a differenciáljátékoknak szinte valamennyi jellegzetes sajátosságát bemutatja.

A differenciáljátékok továbbfejlődésére igen nagy hatást gyakorló másik jelentős esemény Pontrjagin - Boltjanszkij - Gamkrelidze - Micscenkó 1962-ben megjelent [37] műve volt. E könyvben szerzői optimális vezérléselméleti problémák megoldására adtak módszert maximumelvükkel, áthidalva a Bellman - függvényvel kapcsolatos differenciálhatósági problémákat. Ez az eredmény a differenciáljátékok elméletének is első átütő módszere volt, hiszen a vezérléselmélet mint egyszemélyes

differentiáljáték, a téma egy fejezetét képezi.

Az egyszemélyes játékok optimális megoldására kidolgozott ut a kétszemélyes játékoknál mindkét fél számára elfogadható - optimális - stratégiapárok keresésére irányította a figyelmet. A két játékos ellentétes célját ilyenkor úgy fejezzük ki, hogy egyetlen célfüggvényt adunk meg, melyet az egyik játékos maximalizálni, a másik pedig minimalizálni akar. Az olyan játékokat, ahol mindegyik játékoshoz tartozik egy kifizetőfüggvény, amely kifejezi az illető játékos nyereseményét az összes játékos stratégiaválasztásának függvényében, kvantitativ játéknak nevezzük. Ha pedig két személyes játékok esetében a két játékos kifizetőfüggvénye egymásnak minusz egyszerese, ekkor antagonisztikus 0-összegű játékról beszélünk. E játékok megoldásának első próbálkozásai a dinamikus programozás Bellman egyenletének kétszemélyes játékoknál megfelelő Isaacs-Bellman egyenlethez vezettek, amely R. Isaacs 1965-ben megjelent már említett [6] könyvében is megtalálható, természetesen igen egyszerű olyan példák kíséretében, amelyeknél az egyenletnek nincsen a módszer alkalmazhatóságához szükséges egyértékű sima megoldása. A Bellman - egyenlet problémáinak feloldásában oly sikeres maximum-elv analógjaként felvetődött egy maximum-minimum - elv felállításának gondolata az "idő-optimum" illetve egy általánosabb probléma esetében. Az egyik első ilyen eredmény 1962-ben a [17] dolgozatban jelent meg és a [37] -re támaszkodik.

Maga Pontrjagin is ezen az uton indult el [30]dolgozatában. Idevágó eredményeit [31] dolgozatában zárja le, egy

egyszerű mellékelt példával, melyre az általa kidolgozott, akkor legáltalánosabb módszer nem alkalmazható.

Hamar kiderült tehát, hogy a vezérlésselméletben kidolgozott leghatásosabb módszerek is igen mérsékelt sikerrel alkalmazhatók a differenciáljátékok problémáinál. Némi magyarázattal szolgál azonban, hogy addig, míg egy optimumfeladat legalább ξ -optimális megoldásához elegendő, hogy a költségfünkcionál felülről korlátos legyen, optimum létezéséhez pedig elegendő, hogy a funkcionál értelmezési tartománya valamilyen értelemben zárt legyen /és természetesen az értelmezési tartomány ne legyen üres/, egy min-max feladat megoldhatóságához az szükséges, hogy a költségfünkcionálnak nyeregpontja legyen. Ha ilyen van, a funkcionálnak e pontban felvett értékét nevezzük a játék értékének. Könnyű példát mutatni arra, hogy a játéknak általában nincsen értéke, ami azt jelenti, hogy a játékban nincs mindkét fél számára elfogadható kompromisszum. Mindkét fél számára elfogadható szituáció olyan stratégiapárt jelent, amelynél mindkét fél biztos lehet abban, hogy ha a nyeregpontot jelentő stratégiapár őt illető komponensét választotta, a másik félnek érdeke a másik komponens választása. Ez egyuttal azt is jelenti, hogy a költségfüggvény tulajdonságai alapján információt nyerhetünk a másik játékos választásáról és ennek az a feltétele, hogy a játéknak legyen értéke.

Ha azonban nincs a játéknak értéke, valamilyen feltevessel kell élnünk a másik fél választott stratégiájáról. Az egyik szokásos ilyen feltevés szerint minden t időpontban ismertnek tételezzük fel a másik játékos választását valamennyi

t' , $t' \leq t$ -re. A megengedett egyenlőséget annak határeseteként értelmezhetjük, hogy kisebb késéssel nyerünk információt az ellenfélről, mint az rólunk. Gyakorlati szempontból természetesen erősen vitatható ez a feltevés, mint ezt R. Isaacs megjegyzi a már említett [7] /1974-es cikkgyűjtemény/ dolgozatában, mégis még ugyanabban a cikkgyűjteményben igen neves szerző /Pschenichnij/ él azzal a feltevéssel, hogy az ellenfél stratégiáját egy kis intervallumon előre ismeri. Ez is mutatja, hogy nem könnyű a szóbanforgó kiegészítő feltevést úgy megválasztani, hogy a kapott matematikai modell kezelhető is legyen és játékot modellezzen.

A fenti feltevés mellett az a feladatunk, hogy adott peremfeltétel megoldásához vezető stratégiapárt adjunk meg, általában optimalitási kritérium nélkül. Ez a játékokkal modellezett gyakorlati problémáknak azt a jellegzetességét tükrözi, hogy elsődleges kérdés a peremfeltétel megoldása /azaz az adott cél elérése/, és csupán másodlagos az optimális elérése. E megfontolások vezettek a minőségi játékok fogalmának kialakításához, ahol a játék célja az adott peremfeltételek teljesítése.

E fejtegetések mintegy tükörképét adják az 1964-65 évet követő 4-5 éves időszak kutatásainak.

A már említett - 1966-ban megjelent - [31] dolgozatában Pontrjagin rámutatott a min-max elven alapuló variációs módszerek korlátaira. Együttal felmerült az igény új módszerek keresése iránt. Az utkeresés jelentős állomását jelentette Pontrjagin 1967-es Los angelesi útja, melynek során több

előadást tartott eredményeiről különböző amerikai városokban /ld. [33] /. A továbbhaladáshoz szükséges lökést ezen útja során E. Pollakkal a Berklini egyetem professzorával folytatott beszélgetés adta. Polak kifejtette, hogy véleménye szerint a lineáris játékok problémáit minden addiginál általánosabban lehetne megoldani, a linearitás felhasználásával. Ez azért volt igen figyelemre méltó, mert a [31] dolgozat függelékének ellenpéldája egy igen egyszerű lineáris játék volt, másrészt [32] dolgozatában a [31] dolgozat nemlineáris módszereit próbálja lineáris játékokra általánosítani. Amerikai útját követően /ld. a [33] dolgozatok/ lineáris játékokkal foglalkozik. Az elfogást tárgyalja, de nem variációs módszerekkel, hanem a linearitás felhasználásával. Dolgozataiban azzal a feltevéssel él, hogy az elfogó játékos stratégiaválasztásához ismeri az ellenfél választását az adott időpillanatban, vagyis információs fölényben van. Bár második dolgozatának módszere "optimális" megoldást ad az "időoptimum" feladatra, nem törekszik optimális stratégiára, csupán az elfogás időpontjára ad felső korlátot.

Pontrjagin dolgozatát számos lineáris játékokkal foglalkozó dolgozat követte. Ezek egyrészt az állandó együtthatós esetre kidolgozott módszert igyekeznek általánosítani változó-együtthatós lineáris rendszerekre, másrészt az elfogási idővel, mint funkcionállal megadott mennyiségi játéknak próbálják a nyeregpontját meghatározni. Pontrjagin módszerét általánosítja Nyikolszkij 1969-ben megjelent [21] dolgozatában.

A linearitást Pontrjagintól eltérően felhasználó két utat

kell kiemelnünk, melyek egyuttal az elfogási időre vonatkozó minimax problémát is megoldják. Az egyik ut Psenyicsnyij nevéhez fűződik, /ld. [38] /, és konvex irányítási tartományok fel-tételezése mellett módszere konvex halmazoknak hipersikkal való elválaszthatóságán alapszik.

A másik módszer Kraszovszkijtől és munkatársaitól származik. Az ide kapcsolódó dolgozataik /ld. pl. [8] / eredményeit és a módszert Kraszovszkij 1969-ben megjelent [9] könyve foglalja össze. A módszer lényege, hogy geometriailag keresi meg az elfogó játékos számára azt a p_0 célpontot valamely τ időpontban, amellyel az elfutó játékost legjobban megközelítheti annak bármely stratégiája mellett. /Ez valójában egy min-max feladat geometriai megoldását jelenti./ E p_0 pont optimális elérése pedig Pontrjagin maximumelvét alkalmazza. Könyvében sok alkalmazást mutat be.

1969-ben jelent meg Pontrjaginnak és Micscenkónak [34] dolgozata, amelyben bebizonyítanak egy elfutási tételt lineáris játékokra. Ez volt a differenciáljátékok történetében az első ilyen általános elfutási tétel. A dolgozat módszere ezuttal is a linearitáson alapszik, nem használ optimalitási kriteriumokat. A t -beli stratégiaválasztásnál ismertnek tételezi fel az ellenfél stratégiáját minden $t' \leq t$ időpontban. A módszert Pontrjagin több lépésben továbbfejlesztette, eredményei a maguk nemében egyedülállóak.

A mennyiségi játékok megoldását jelentő nyeregpontra létezésének kérdésénél felmerült nehézségek természetesen nem csupán a minőségi játékok irányába terelték a kutatásokat, hanem

számos szerző a nyeregpont létezésének kérdését vizsgálta. Mint említettük, ez a kérdés a lineáris játékok kutatóit is foglalkoztatta.

Az egyik kifejezetten a játék értékével foglalkozó dolgozat Petroszjan nevéhez fűződik, aki geometriai kényszerek mellett vizsgálja meg a játék értékének létezését nemlineáris játékokra /ld. [24] /.

Itt kell megemlítenünk A. Blaquiere, F. Gerard és G. Leitman [48] könyvét. Első felében a szerzők a nyeregpont meghatározásának variációs módszereivel foglalkoznak. Egyrészt szükséges, másrészt elegendő feltételt adnak az optimális pályák létezésére. Utóbbiakat a "szakadási felületek" vizsgálata útján adják azáltal, hogy feltételeket adnak az Isaacs-Bellman módszer számára rossz esetek kizárására. A könyv második fele kétszemélyes minőségi játékokkal foglalkozik. Módszerének lényege az, hogy a játék alaphalmazát három részhalmazra bonthatjuk: Az egyik azon pontok halmaza, ahonnét az első játékosnak van olyan stratégiaválasztása, hogy az ellenfél bármilyen választása mellett célt ér. A második játékos számára is megadhatunk ilyen halmazt, végül e két diszjunkt halmazt választja el a harmadik. Természetesen mindegyik halmaz lehet üres. A könyv azt az esetet vizsgálja, amikor az elválasztó halmaz felület, amelyet egy folytonosan differenciálható függvény 0 nivófelületeként jellemezhetünk. A mű egy többéves kutatási periódust foglal össze, amit a benne található irodalomjegyzék tanusít, részben összefoglaló, bevezető jellegű.

Még egy fontos utat kell megemlítenünk ebből az időszakból.

Varaya Pr. [44] dolgozatában 1967-ben dinamikus rendszerekkel leírt játékok egy osztályára bizonyítja be, hogy a játéknak létezik értéke. Ugyancsak a játék értékével foglalkozik 1969-ben megjelent [49] dolgozata. A dinamikus rendszerekkel való megközelítésben az a fontos pozitívum rejlik, hogy az egészen konkrét differenciáljátékok vizsgálatától kiindulást jelent általánosabb vizsgálatok irányába.

Módszerében érdekes Petrovnak 1970-ben megjelent dolgozata, aki az időtartamot felosztva részintervallumonként adja meg " ε - optimális" stratégiáit, majd $\varepsilon \rightarrow 0$ mellett belátja, hogy ezek limesze nyeregpont-stratégia.

Petroszjan egy dolgozatára hívjuk fel még a figyelmet, mielőtt az 1970-es évekre áttérnénk. 1970-ben jelent meg a [27] dolgozat, és nem teljes információs játékokkal foglalkozik. Dolgozatában a már említett információs problémának azt a megoldását vitatja, jogos-e egy adott t időpontban a stratégia-választáshoz az ellenfél ezen időpontbeli stratégiájának a felhasználása. Dolgozata játékelméleti módszereken alapszik és feltűnnek a kevert stratégiák, amelyeknél a játékos véletlen törvényszerűségek alapján választ stratégiát. A kevert stratégiákhoz kapcsolódik még Smoljakov [41] dolgozata.

A 60-as években számos kutatási irányzat alakult ki és az 1970-es évekre felmerült a kutatási eredmények összefoglalásának, rendszerezésének igénye. Ennek eredményeképpen irányításelméleti és optimalizálással foglalkozó konferenciákon megjelenik a differenciáljátékok önnálló témája.

Az 1969-es nizzai konferenciáról kiemeljük a differenciáljátékok témakörének képviselőjeként Pontrjagin nevét. A

szerző itt az elfutásról szóló lineáris játékokra vonatkozó eredményeit ismertette, melyek a már említett [34] dolgozat eredményeinek továbbfejlesztései. Egy másik fontos lépcsőt jelent Kraszovszkijnek itt megjelent dolgozata. Tovább folytatja geometriai jellegű vizsgálatait minőségi játékok esetében.

Láttuk, hogy a minőségi játékok korábbi módszerei azon alapultak, hogy az egyes játékosok számára "jó" kiindulási pontok halmazát alkalmas differenciálható függvény nivóhalmazaival jellemezhetjük. /Ld. [48] /, és ilyenkor e függvény gradiense segítségével felállított lokális min-max elv alapján választhatjuk meg stratégiánkat. Kraszovszkij is megfogalmaz egy lokális min-max elvet, melyhez azonban nem szükséges az említett sima függvény létezése. Ezzel részletesebben Kraszovszkij könyvénel foglalkozunk majd. /A fenti dolgozatok megtalálhatók a [14] -ben./

Ugyanebben az évben rendezték meg az első differenciáljátékokról szóló nemzetközi konferenciát Massachusett egyetemén Amherstben /ld. [50]/. E konferencián már megjelentek a végtelen dimenziós tereken megfogalmazott konvex-konkáv játékok, és alkalmazásaik parciális differenciálegyenletekre. Ezek az eredmények Bensoussan nevéhez fűződnek.

1970-ben két szimpózium is foglalkozott differenciáljátékokkal. Az egyik a varennai hatás-ellenhatás matematikai modelljeivel foglalkozó nyáriiskola, a másik pedig az American Automatic Control Council-nak a Georgia Institut of Technology atlanti intézetben tartott 1970 évi szimpóziuma.

A varennai nyáriiskola kiadványa szerkezetileg négy

részre bomlik /ld. [51]/. Az első részben öt neves szerző összefoglalja a differenciáljátékokra vonatkozó alapismereteket bevezető tanulmányok formájában. E tanulmányok témái röviden az alábbiak: Berkovitz az egészen hagyományos variációs uttal foglalkozik, A. Blaquire tanulmánya a már említett [48] könyvének módszereit követi. Friedman egzisztenciaproblémákkal foglalkozik. Eljárása azon alapszik, hogy az intervallum felosztása után részintervallumonként ad meg a nyeregponthoz alulról és felülről közelítő stratégiákat. Bebizonyítja, hogy létezik limeszstratégia, amelyhez tartozó költség éppen a játék értéke. Ki kell emelnünk R.T. Rockafellar dolgozatát, aki duális jellemzést ad a nyeregpontra, Varaya eredményeivel pedig [44] dolgozata kapcsán már foglalkoztunk.

A második részből az első három dolgozatot említjük: Aubin pareto minimum elvét, A. Bensoussan konvex-konkáv funkcionálok nyeregpontjáról szóló dolgozatát. Az utóbbi dolgozatban az eredmények számos alkalmazását találjuk diffúzió-egyenletre és egyéb parciális differenciálegyenletekre. Végezetül P. Brunovszkij dolgozatának a jelen dolgozat szempontjából az a jelentősége, hogy ő vezette be dolgozatában az elnyelő-taszító halmazok fogalmát, amelyekhez dolgozatunk eredményeinek egy része kapcsolódik. Elnyelő halmazon olyan halmazokat értünk, amelyekre teljesül, hogy ha az egyik játékosnak sikerül a halmaz határára juttatni az állapotvektort, akkor azt is el tudja érni, hogy a halmazból sohase jusson ki. Taszító egy halmaz akkor, ha a komplementere elnyelő. E fogalmak jelentősége igen nagy akkor, ha a célhalmazra valamelyik tulajdonság teljesül.

Az említett amerikai szimpóziumnak egy négy dolgozatból álló összefoglaló tanulmánya jelent meg a differenciáljátékok témaköréről /ld. [52] /. Az első dolgozat a differenciáljátékok helyzetét elemzi és az elért eredmények kritikáját adja. A szerző rámutat arra, hogy a kétszemélyes játékok esetében eddig elért eredmények nem kielégítőek a gyakorlat tükrében. Az 1970-es évekig is általánosan elfogadott az a feltevés, hogy egy adott időpillanatban a döntést hozó játékos felhasználhatja az ellenfél ezen időpontbeli döntését. Márpedig ugye közgazdasági, mint katonai alkalmazásoknál az időeltolódás igen alapvető sajátosság. A másik fontos, az elméletben figyelmen kívül hagyott tényező az, hogy egy adott játék során az elfutó-elfogó szerep nem állandó a gyakorlatban. Gazdasági alkalmazások esetében pedig általában több csoport alakul ki, és e csoportok a játék során keverednek is, érdekeik függvényében. A sztochasztikus játékokról szóló dolgozat szerzője értékeli az e témában kialakult kis számú irányzatot. A klasszikus játékelméletben oly központi szerepet játszó kevert stratégiákat itt nem tekinti oly sikeresnek. A véletlen törvényszerűségek bevezetésének szükségességét a kiindulási adatok pontatlan ismeretével, a stratégia felépítéséhez szükséges információ pontatlanságával illetve hiányosságaival és a dinamikába belejátszó véletlen tényezőkkel indokolja.

Végül a negyedik dolgozat, amely E. Roxin nevéhez fűződik, a játék értékének problémáját boncolgatja. A probléma megoldásának kulcsát a variációs módszer Berkovitz Blaquiére féle elég bonyolult javított változatával szemben más, a szakadási felületekkel nem bajlódó módszerekben jelöli meg. Kiemeli

Varaya és Friedman már említett módszereit. Felhívjuk a figyelmet e cikkgyűjtemény végén közölt irodalomjegyzékre, amelyben felsorolt 367 dolgozatot a téma 1970-ig megjelent teljes irodalmának tekinthetünk.

A differenciáljátékok helyzetével foglalkozó dolgozatok közül fontos helyet foglal el Miscsenkó [19], 1971-ben megjelent dolgozata. A szerző ebben Pontrjagin körül kialakult Sztyeklov intézeti iskola eredményeit értékeli. Ezek az eredmények három téma köré csoportosulnak: 1. A két játékos közül az egyik determinisztikusan játszik. 2. Az egyik játékos véletlen törvényszerűség szerint játszik, a másik játékos pedig irányítani próbál. 3. Mindkét játékos játszik. Az utolsó témakörben a legjelentősebb eredmények Pontrjagin már említett eredményei. A véletlen stratégiát tartalmazó játékkal kapcsolatosan Pontrjaginnak, Miscsenkónak és Kolmogorovnak közös dolgozatait említi a szerző, amelyek a még ma is alig művelt sztochasztikus differenciáljátékok témaköréhez kapcsolódnak.

Az 1970-es évek kutatásainak főbb irányvonalaihoz eljuthatunk eddigi elemzéseink folytatásával. Láttuk, hogy a differenciáljátékok értékének létezése körüli problémák információs problémákhoz vezettek. Érték nem létezése esetén feltevással kellett élnünk ugyanis a másikról a stratégia felépítésekor felhasználható ismereteket illetően. A szokásos áthidaló feltevés erős kritikát kapott az említett [52] cikkgyűjteményben. A kutatások másik meghatározó tényezőjét a meglévő eredmények összesége jelentette. Láttuk, hogy üldözés, elfutás és minőségi játékok témáiban a lineáris játékok vizsgálata lényegében

lezárult. Továbbra is élő probléma maradt azonban a játék értékének létezési problémája. E megjegyzések összefoglalásaképpen az alábbi főbb témák köré csoportosíthatjuk az 1970-es években megjelent dolgozatokat: 1. Nem teljes információjú játékok, 2. nemlineáris minőségi játékok, 3. a játék értékének kérdése. Végül egy negyedik témát említünk, melynek eddig nincsenek előzményei, ez pedig az N-személyes játékok. Ebben az utóbbi témában minőségi játékok vizsgálata egészen konkrét problémák megoldásáig jutott el a mai napig, mennyiségi kérdéseket pedig főképpen variációs módszerekkel vizsgálnak.

Kezdjük az időszak irodalmának áttekintését a nemlineáris játékok minőségi problémáinak vizsgálatával. Két dolgozatot említünk átmenetként a lineáris problémákról a nemlineárisakra: Az egyik Pontrjagin /ld. [36] /, a másik Gamkrelidze és Haratisvili /ld. [4] / nevéhez fűződik. Pontrjagin dolgozata a jelzett cikkgyűjteményben az elfutásra vonatkozó eredményeinek legkifinomultabb módszerét tárgyalja. Igen szép dolgozat, amelyben leírt módszer a minőségi játékok témakörében egyedülálló. Gamkrelidze és Haratisvili dolgozatukban Pontrjagin eredményét általánosítják nemlineáris jobboldalu, lineáris, állandóegyüttes n -edrendű baloldalu differenciáljátékokra. Módszerük alapja hasonló Pontrjaginéhoz, nevezetesen hogy a megoldást alkalmas alakban előállítják és az előállítás ismeretében határozzák meg az elfutó stratégiát.

Igazán nemlineáris differenciáljátékok témaköréhez tartozó, alapvetően új módszereken nyugvó eredményeket Kraszovkij és Szubbotin publikáltak a minőségi játékok témakörében.

Első idevágó eredményeik az 1970-71-ben dolgozataikban találhatók meg /ld. [11], [15] /. E módszerek alapját képezik annak a nagy összefoglaló könyvnek, amely 1974-ben jelent meg és mindezeket az eredményeket tárgyalja. A [20] dolgozattal együtt Kraszovszkij - Szubbotin munkásságát a [16], 1974-ben megjelent könyvük alapján ismertetjük.

Jelen dolgozat szempontjából igen fontos geometriai módszerrel mutat be Lagunov [18] dolgozatában. Eredménye rokon, de élesebb mint Brunovszkij [51] -ben megjelent már említett dolgozatának eredményei. Ami alapvetően új, az, hogy elfutásra a célhalmaz felületén fogalmaz meg feltételt. Dolgozatának korlátját az jelenti, hogy csak differenciálgeometriai eszközökkel tudja a felületre megfogalmazott feltételeit kezelni és ezért csak egy kodimenziós kétszer folytonosan differenciálható felületre tud feltétel adni. További korlátozó feltevés dolgozatában az, hogy a jobb oldal két egyenként egy játékos-tól függő tagra esik szét /azaz a két játékos "függetlenül" irányíthatja a rendszert/. Ez a feltétel pedig esetében biztosítja a lokális nyeregpontra létezését. Ami viszont eredménynek élességét mutatja, a fenti feltételek mellett szükséges és elegendő feltételt fogalmaz meg elfutásra.

Megemlítjük még Nyikolszkij dolgozatát, aki dinamikus rendszerek esetére bizonyítja be elfutási tételt 1972-ben megjelent [23] dolgozatában. Nyikolszkij munkássága a nem teljes információjú rendszerekhez is kapcsolódik, idevágó eredményei megtalálhatók az 1971-ben megjelent [22] és [54] dolgozataiban. Ő a nem teljes információt úgy érti, hogy az irányításhoz az állapotvektornak csupán a vetületét ismeri és lineáris

esetben Pontrjagin módszerét próbálja általánosítani.

A differenciáljátékok értékének létezése mint említettük továbbra is élő probléma maradt. E témából három dolgozatot emelünk ki. Kettő Petrov nevéhez, a harmadik pedig Friedman nevéhez fűződik. Petrov 1970-ben megjelent [28] dolgozatában üldözési játékokról mutatja meg a két játékos távolságával megfogalmazott három költségfüggvény mellett, hogy létezik nyeregpont. Az 1973-ban megjelent [29] dolgozatában azonban példát mutat olyan üldözési játékokra, amelynél a megfogalmazott költségfüggvénynek nincsen nyeregpontja. Friedman [33] dolgozatában szintén a játék értékének létezésével foglalkozik.

Az eredmények összefoglalásának helyzetfelmérésnek az igénye továbbra is megmutatkozik. 1973-ban jelent meg A. Blaquiere gondozásában az [1] cikkgyűjtemény. Az 1970-es évek kutatásainak irányvonala tükröződik abban, hogy e cikkgyűjteményben már önálló helyet kapnak az n -személyes mennyiségi játékok.

Bevezető cikkében Isaacs elemzi a differenciáljátékok történetét. Mondanivalóját röviden úgy összegezhetjük, hogy véleménye szerint a differenciáljátékok matematikai kezelésének még mindig nem alakult ki a kellőképpen rugalmas módszere. Tehát bizonyos értelemben még mindig az utkeresés stádiumában vagyunk. Sorra veszi az egyes témákat. A kevert stratégiákról igen érdekes véleményt ír: feltehetően a vezérléstudományban nevelkedett fel a játékelmélet nemzedék és ezért kerültek ezek a megoldási módszerek.

A 0-összegű játékok témaköre, mint a nyeregpont keresésének kérdése, továbbra szerepel. E témában Psenyicsnyij írt

egy dolgozatot az ε -stratégiákról, melyek segítségével a játékok értékének létezésére ad bizonyítást, természetesen bizonyos feltételek mellett. Asszimmetrikusan kezeli a játékosokat és ennek megfelelően stratégiapárokat ad meg, még hozzá

egy helytől függő $\varepsilon(z)$ időtartamra. A gyűjtemény második dolgozatának szerzői A. Blaquiere és P. Caussin, akik Banach terekre általánosítják korábbi, az Isaacs-Bellman egyenlethez kapcsolódó eredményeiket. Ezt egy nem teljes információjú játékról szóló dolgozat követi. A szerző a stratégiák megadásánál nem használja fel az ellenfél adott időpontbeli adatait. A feladatot végül is egy variációs min-max elvre vezeti vissza. Hasonló témájú Ciletti dolgozata is.

A nem 0-összegű, n-személyes játékokkal foglalkozó rész dolgozatai a pareto-egyensúly jellemzésével a Nash-féle egyensúly létezésével és koalíciós játékokkal foglalkoznak. A pareto egyensúlyra Blaquiere és Juricek a variációs módszert általánosítják. Az irányításban fellépő átkapcsolási problémákat itt is a korábbi, szakadási felületek osztályozásának módszerével próbálja megoldani. Stalford és Leitman adnak elegendő feltételt N-személyes játékok esetében Nash-féle egyensúlypont létezésére. Egy dolgozat foglalkozik a koalíciós játékokkal, amelyek lényege, hogy az együttes haszon növelésének érdekében egyéni hasznuk figyelmen kívül hagyásával az egy koalícióba tömörülő játékosok a koalíció közös költségfüggvényét igyekeznek maximalizálni. Juricek ez esetben is a variációs módszert alkalmazza a probléma megoldására.

Összefoglalásképpen azt mondhatjuk, hogy a cikkgyűjtemény

szerzői a differenciáljátékok témakörének viszonylag fiatal, időszerű kérdéseit vizsgálják, melyek megoldásánál - természetesen - a leghagyományosabb variációs módszert igyekeznek alkalmazni és általánosítani.

1974-ben két nagyobb lélegzetű kiadvány jelent meg a témában. Az egyik Kraszovszkij és Szubbotin [16] könyve, a másik a Journal of Optimization c. folyóirat Leitman és Ho szerkesztésében kiadott [53] különszáma.

Kraszovszkij és Szubbotin könyvükben az 1969 óta eltelt időszak alatt elért eredményeiket foglalják össze, amelyek egy szép és erős geometriai módszert eredményeztek általános nemlineáris kétszemélyes differenciáljátékok minőségi problémáinak megoldására. Módszerük első igen lényeges mozzanata, hogy általánosított trajektoriákkal dolgoznak. Ez azt jelenti, hogy trajektoriának tekintik az olyan görbéket is, amelyek töröttvonalak egyenletes limeszeként előállnak. Ezért sok, a variációs módszernél megoldhatatlan szakadási problémákhoz vezető feladatnak is lesz általánosított megoldása. Módszerük másik fontos eleme, hogy a korábbi minőségi játékokra alkalmazott módszerekkel ellentétben nem igényli a célhalmazt és a játékosok számára "jó" kiindulási pontok halmazait jellemző sima függvény létezését. Ehelyett minden pontban egy geometriai megfontolások alapján felépített függvény lokális nyeregpontjának megadása útján választja meg stratégiáját. Végezetül fő eredménye, amelyet azután rengeteg problémára alkalmaz, egy alternatív tétel, amelyben jellemzi az elfutó illetve elfogó játékosok számára "megfelelő" pontok halmazát. Belátja azon

Pontok halmazáról, ahonnet lehetséges az elfogás egy véges időn belül, hogy zárt. Így természetesen a komplementer nyílt. Mennyiségi játékokra való alkalmazások lényege, hogy a zárt "elfogási tartományon" a "folytonos" funkcionál felveszi minimumát vagy maximumát. Tekintettel azonban arra, hogy a zárt-ságot a szerzők általánosított trajektoriák segítségével bizonyították, így a szóbanforgó zárt halmaz nem üres volta esetén a szerző általában egy ξ -optimális megoldás létezését tudja biztosítani. A könyv érdekessége, hogy kevert stratégiákkal is foglalkozik, melyeket mint említettünk, Isaacs hiányolt [1]-ben irt összefoglalójában.

Mint ez az [53] cikkgyűjteményen is tükröződik, a differenciáljátékok sztochasztikus megközelítése, kevert stratégiák felépítése ebben az időszakban kezd teret hódítani. Megemlítjük ezzel kapcsolatban, hogy az 1974-ben megtartott Stochastic Control szimpóziumon, bár meghirdetett témaként szerepelt a differenciáljátékok, elfogadható dolgozat nem érkezett be. /Összehasonlításként vezérléstudományi témájú szimpóziumon már 1969-ben helyet kaptak a differenciáljátékok./ A szóbanforgó különkiadás dolgozatainak több mint fele valamilyen formában a sztochasztikus differenciáljátékok témakörébe tartozik. D.J. Wilson lineáris kvadratus differenciáljátékok esetében ad kevert stratégiák felhasználásával megoldást. Dolgozatának érdekessége, hogy absztrakt Hilbert téren fogalmazza meg először a problémát, és megoldása után alkalmazza differenciáljátékokra. Lineáris, kvadratus problémát old meg késleltetett zajos információval K. Movi és E. Shimemura. A zajos késleltetett információt csupán az első játékosról tételezik fel a

szerzők, a másodiknak a teljes információ a rendelkezésére áll. Az első játékos egy optimális állapotbecsléssel helyettesíti a hiányzó információját és így ad meg optimális stratégiakonstrukciót. Y.C.Ho dolgozatában az előzetes és késleltetett ismeretek felhasználásával próbál minimax feltételeket adni sztochasztikus játékokra. Végül W.H. Hartman az N-személyes csoportmunka esetét vizsgálja, ami olyan N-személyes játékot jelent, amelyben egy költségfüggvény szerepel.

A további determinisztikus problémát taglaló dolgozatok numerikus módszerekkel, késleltetett információjú rendszerekre általánosított variációs módszerekkel és a Nash-féle egyensúlypontra adandó feltételekkel foglalkoznak.

Végezetül a Journal of Optimization c. folyóirat 1976. januári /[55]/ differenciáljátékokról szóló külöнкиadásával fejezzük be összefoglalónkat. A különszám szerkesztője G. Leitmann. Az ide beérkezett dolgozatok legnagyobb része továbbra is a differenciáljátékok információs szerkezetéhez kapcsolódik. Új témaként jelentkezik absztrakt tereken az extrémális vektorok, multikritériumok szerint optimális megoldások keresése. Végül üldözési, elfutási feladatok, illetve egy lineáris játékokkal foglalkozó dolgozat szerepel a cikkgyűjteményben.

Foglaljuk össze röviden a differenciáljátékok témakörében kialakult főbb irányvonalakat és a jelenleg is fontos kérdéseket:

A differenciáljátékok kutatásának első próbálkozásai két személyes játékok esetében a variációs módszeren alapultak.

E módszer azonban egyrészt elsősorban szükséges feltételt szolgáltatott a nyeregponthi stratégiák megadására, másrészt sok szakadási problémához vezetett, nem volt elég hatékony. A variációs módszer, mint első próbálkozás, minden újabb játéktípusnál újra és újra jelentkezik, így absztrakt tereken lejátszódó két személyes játékoknál, N -személyes játékoknál és késleltetett információjú játékoknál.

A differenciáljátékoknál fellépő peremértékfeladatok megoldhatóságára vonatkozó elegendő feltételt biztosító valamennyi tétel bizonyítása konstruktív eljárást igényel /ideértve a variációs módszerekhez kapcsolódó elég bonyolult elegendő feltételeket is/. A variációs módszerek bonyolultsága miatt a kutatások iránya leginkább a szakaszonként állandó illetve szakaszonként megadott közelítő stratégiákhoz vezetett. A lineáris játékok esetében nagy előnyt jelentett az a tény, hogy a megoldás konkrét alakban előállítható.

Fontos probléma az információ kérdése. Ha a játéknak nincs értéke, vagy egyensúlypontja, úgy nincs olyan stratégiaválasztásunk, amely a másikat arra készítené, hogy ő is egy meghatározott stratégiát válasszon. Ilyen esetben az egyik lehetőség az, hogy feltételezzük, hogy kisebb késéssel veszünk tudomást az ellenfél választásáról, mint az a mienkről. A másik út az, hogy véletlen stratégiaválasztás segítségével "nagy valószínűséggel" nagy nyereségre szert tenni. Mindkét felfogás eredményes lehet optimális stratégiák megadására is, ha a játéknak van értéke. Az előző módszer az irodalomban gyakori /különösen a nem késleltetett határeset/, míg az utóbbi most kezd teret hódítani.

A jelenlegi kutatásokról azt mondhatjuk, hogy továbbra is élő probléma jól használható elegendő feltételek megadása egyensúlypont létezésére, illetve a fellelő peremfeltételek megoldhatóságára. Hasonló a helyzet lokálisan megadott optimális stratégiák /kielégítő stratégiák/ összekapcsolásával globális optimális /kielégítő/ stratégiákká. Nyitott probléma még a sztochasztikus játékok információs problémája is.

Dolgozatunkban Brunovszkijnak az [51]-ben található írása, Lagunov [18] dolgozata és Kraszovszkij-Szubbotin munkássága [16]/ alapján egy geometriai módszert adunk nemlineáris N -személyes késleltetett Banach-tereken lezajló játékoknál fellelő peremfeladatok vizsgálatára. Minőségi problémák megoldhatóságát vizsgáljuk és ilyenek megoldhatóságára illetve meg nem oldhatóságára adunk a módszer alkalmazásaként elegendő feltételeket.

0. § Alapvető fogalmak.

A differenciáljátékok a játékelméletnek az utóbbi 10-15 évben kifejlődött, ma is gyors fejlődésben levő fiatal ága. Ezért az alapfeladatot kézenfekvő játékelméleti feladatként megfogalmazni. Induljunk ki tehát az N -személyes játékok egy elég általános definíciójából. Ez ezért is célszerű, mert a differenciáljátékok osztályozásának szempontjai nagyrészt a játékelméletben szokásos szempontok, és így természetesebben kapjuk meg ezeket a játéktípusokat.

1. Az N -személyes játékok.

Jelölje N a játékban résztvevő játékosok I halmazának elemszámát. Minden résztvevő /jelöljük őket $1 \leq i \leq N$ egész számokkal/ adott halmazból választhat stratégiát /e halmazok általában lépéssorozatokból állnak/. Az $i \in I$ játékos számára elérhető stratégiák halmazát jelöljük S_i -vel. A játékosok $s_i \in S_i$ $1 \leq i \leq N$ választása határozza meg az $(s_1, \dots, s_N) =: s$ szituációt. Az összes szituációk halmazát

$$S := \prod_{i \in I} S_i \quad /1/$$

jelöli. Minden $i \in I$ játékoshoz tartozik egy $H_i: S \rightarrow R$ kifizetőfüggvény.

0.1 Definíció: A

$$\Gamma := \langle N, \{S_i\}_{i=1}^N, \{H_i\}_{i=1}^N \rangle \quad /2/$$

rendszer N személyes játéknak nevezzük, ahol S_i halmazt jelöl, $H_i := \prod_{i=1}^N S_i \rightarrow R$ pedig valós függvény $i=1, 2, \dots, N$ mellett.

A játékosok célja olyan stratégiaválasztás, hogy a kifizetőfüggvényekkel kifejezett nyereményük a lehető legnagyobb legyen.

Az N személyes játék definíciója után érdemes bevezetni még ezen a szinten néhány - a differenciáljátékoknál is alapvető - olyan fogalmat, melyek rávilágítanak a stratégiaválasztás módszereire.

A legalapvetőbb ilyen fogalom az N -személyes játék Nash-féle egyensúlypontja. Legyen $s = (s_1, \dots, s_N)$ egy szituáció. Azt a szituációt, amely s -től az i -ik stratégiában tér el, jelölje $s \parallel s'_i$, ahol s'_i az s_i helyett álló stratégiát jelöli.

0.2 Definíció: A játék $s^* = (s_1^*, \dots, s_N^*) \in S$ szituációját a játék Nash-féle egyensúlypontjának nevezzük, ha bármely $s_i \in S_i$ esetén

$$H_i(s^* \parallel s_i) \leq H_i(s^*) \quad /3/$$

minden $1 \leq i \leq N$ mellett.

Az egyensúlypont tehát olyan szituációt jelent, amely minden játékos számára elfogadható. A játékoknak általában nem létezik egyensúlypontja. Elég tág játékosztályokra azonban található mindenki számára elfogadható kompromisszum.

Ha a játékban nincsen mindenki számára elfogadható szituáció, akkor a játékosok más utakat keresnek nyereményük növelésére. Két ilyen lehetőséget említünk, az egyiket a differenciáljátékoknál játszott fontos szerepe miatt részletezve.

Kevert stratégiákon a stratégiák véletlen megválasztását

értjük, pontosabban az egyes játékosok egymástól független véletlen törvényszerűségek szerint választják meg stratégiájukat.

Az említett másik utnál a játékosok között egy kijátszási sorrendet jelölünk ki. Legyen ez esetünkben éppen indexeik természetes sorrendje. Az i -ik játékos stratégiája megválasztásánál figyelembe veheti az $i-1, i-2, \dots, 1$ játékosok döntéseit. Ezt felírhatjuk

$$s_i = s^{(i)}(s_{i-1}, \dots, s_1) \quad /4/$$

függvény formájában is, ahol az $s^{(i)}$ függvény az i játékos döntését adja meg az előtte álló játékosok döntéseinek függvényében. Tovább finomítható e kijátszási sorrend elve, ha az $S_i, 1 \leq i \leq N$ halmazok elemeiről feltevással élünk. Legyen T az egész vagy valós számok halmaza, attól függően, hogy diszkrét vagy folytonos idejű játékokról beszélünk. Legyen a játék időtartama a $[t_0, t_1] = \{t \mid t_0 \leq t \leq t_1, t \in T\}$ intervallum. Legyen minden $i \in I$ mellett U_i adott halmaz, és legyen

$$S_i := \{s \mid s: [t_0, t_1] \rightarrow U_i, s \text{ eleget tesz adott feltételnek}\} /5/$$

Ilyen stratégiák mellett úgy finomíthatjuk a fenti kijátszási sorrend elvét, hogy az i -ik játékos választását egy $s^{(i)}(s_1, \dots, s_N)$ Volterra típusú leképezéssel adjuk meg:

0.3 Definíció: Az $s^{(i)}$ leképezést Volterra típusúnak nevezzük, ha felírható

$$s^{(i)}(s_1, \dots, s_N)(t) = f\left(\left\{s_1(t'), \dots, s_{i-1}(t')\right\}_{t'=t}, \left\{s_1(t''), \dots, s_N(t'')\right\}_{t'' < t}\right) /6/$$

alakban.

Volterra típusu leképezésnél a finomított kijátszási sorrend úgy érvényesül, hogy az i -ik játékos a t időpontban döntéséhez felhasználhatja a sorrendben őt megelőzők t -beli döntéseit és valamennyi játékos $t' < t$ -beli döntését, $t' \in [t_0, t_1]$ mellett.

Még egy jellegzetesen N -személyes nyereménynövelési módot említünk meg részletezés nélkül. Ez a kooperatív játék. Erről akkor beszélünk, ha a játékosok egy $V \subset I$ csoportja egyéni nyereményének növelése helyett a koalíció $H_V := \sum_{i \in V} H_i$ nyereményének növelésére törekszik. Ennek nyilván akkor van értelme, ha így nagyobb nyereményhez jutnak, mint az egyénileg elérhető legnagyobb nyeremények összege.

Most pedig rátérünk az N -személyes differenciáljátéknak, mint a fent bevezetett N -személyes játékok speciális osztályának definíciójára.

2. Differenciáljátékok.

Az előző pont jelöléseit itt is megtartjuk, vagyis I jelöli a játékosok N elemű halmazát. Legyen B egy Banach tér, R pedig jelentse a valós számok halmazát. Képezzük az $E := R \times B$ szorzat Banach teret, elemeit jelöljük (t, x) -el. E pont során a T időpontok halmaza mindig az R -el egyezik meg.

Legyen továbbá U_i minden $1 \leq i \leq N$ mellett Banach tér és legyen $K_i \subset U_i$, $i=1, 2, \dots, N$ mellett valamilyen korlátozó halmaz.

Legyen $G \subset E$ nyílt halmaz és legyen

$$f: G \times \prod_{i=1}^N K_i \rightarrow B \quad /7/$$

egy leképezés. /Az f -re, K_i -re további feltételeket majd a következő §-beli konkrét vizsgálatoknál adunk./ Az f -hez egyértelműen tartozik a

$$F: G \times \prod_{i=1}^N K_i \rightarrow E$$

$$F := (1, f) \quad /7a/$$

leképezés.

Legyen most $[t_0, t_1] \subset T$ zárt intervallum és legyenek $(t_0, z_0) = \tilde{z}_0$, $(t_1, z_1) = \tilde{z}_1 \in G$ pontok. Legyen

$$\tilde{z}: [t_0, t_1] \rightarrow G \quad /8/$$

$$\tilde{z}(t) := (t, x(t))$$

olyan leképezés, amelyre $\tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0$, $\tilde{z}(t_1) = \tilde{z}_1$. Legyen továbbá

$$\mu_i: [t_0, t_1] \rightarrow K_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad \text{mellett } /9/ \text{ egy}$$

leképezés.

0.4 Definíció: Akkor mondjuk, hogy a /8/-al definiált \tilde{z} leképezés megoldása a

$$\dot{\tilde{z}}(t) = F\left(\tilde{z}(t), \prod_{i=1}^N \mu_i(t)\right) \quad /10/$$

egyenletnek, ha

a. \tilde{z} ab folytonos

b. \tilde{z} m.m. differenciálható

c.

$$\dot{\tilde{z}}(t) = F\left(\tilde{z}(t), \prod_{i=1}^N \mu_i(t)\right) \quad \text{m.m.} \quad /11/$$

teljesül.

Megjegyezzük, hogy egzisztenciáról és unicitásról a 0.4 definícióban szereplő megoldással kapcsolatban egyelőre nincsen szó.

Legyen most $\Theta \subset G$ egy zárt részhalmaz és legyen $(t_0, x_0) = z_0 \in G, z_0 \notin \Theta$ egy rögzített pont.

0.5 Definíció: A /9/ -el definiált $\prod_{i=1}^N \mu_i(t)$ irányítások szorzatáról akkor mondjuk, hogy összeköti a z_0 pontot a Θ -val, ha van a /10/ egyenletnek olyan, a $[t_0, t_1]$ intervallumon értelmezett 0.4 definíció szerinti értelemben vett \tilde{z} megoldása, amelyre teljesülnek a

$$\begin{aligned} \tilde{z}(t_0) &= z_0 \\ \tilde{z}(t_1) &\in \Theta \end{aligned} \quad /12/$$

feltételek. Az ilyen \tilde{z} görbét nevezzük a továbbiakban z_0 -at és Θ -t összekötő görbének.

Ezzel eljutottunk a differenciáljátéknak mint N-személyes játéknak a definiálásához. Sorra definiáljuk a 0.1 definícióban szereplő fogalmakat. Legyen i egy rögzített I -beli elem.

0.6 Definíció: Az i játékos számára felhasználható stratégiának nevezünk egy olyan /9/ alaku μ_i leképezést, amelyhez $i \neq j, 1 \leq j \leq N$ mellett megadhatók olyan μ_j /9/ alaku leképezések, hogy az $s := \prod_{k=1}^N \mu_k$ szorzattal az alábbi feltételek egyike teljesül:

/1/ Létezik valamely véges $t^* \leq t_1$ mellett olyan $\tilde{z} : [t_0, t^*] \rightarrow G$ görbe, amely az s -el mint irányítással összeköti z_0 -t a Θ -val, a 0.5 definíció szerinti értelemben.

/2/ Létezik egy $\tilde{z} : [t_0, t_1] \rightarrow G$, $\tilde{z}(t_0) = z_0$ görbe, mely eleget tesz a /10/ differenciálegyenletnek az s irányítás mellett a 0.4 definíció értelmében.

0.7 Definíció: Az i , $1 \leq i \leq N$ játékos stratégiáinak halmaza legyen az

$$S_i := \left\{ \mu \mid \mu : [t_0, t_1] \rightarrow K_i, i \text{ számára felhasználható stratégia} \right\} \quad /13/$$

0.8 Definíció: Megengedett szituációnak nevezzük a $\prod_{i=1}^N S_i$ szorzathalmaz olyan s elemét, amellyel teljesül a 0.6 definíció /1/ vagy /2/ feltétele.

Megjegyezzük, hogy a fentiekből következik, hogy minden játékos minden felhasználható stratégiájához található olyan megengedett szituáció, amelyben az adott stratégia szerepel.

0.9 Definíció: Egy $H: S \rightarrow R$ leképezést megengedettnak nevezünk, ha a megengedett szituációk halmazának pontjain véges értéket vesz fel, a nem megengedett szituációkon pedig minusz végtelen értéket.

0.10 Definíció: Differenciáljátékon olyan

$$\Gamma = \left\{ I, \{S_i\}_{i=1}^N, \{H_i\}_{i=1}^N \right\}$$

játékot értünk, ahol I jelenti a játékosok N elemű halmazát, S_i $1 \leq i \leq N$ mellett a felhasználható stratégiák halmazát, H_i pedig $H_i: S \rightarrow R$ megengedett kifizetőfüggvény minden $1 \leq i \leq N$ mellett.

Az így definiált N -személyes differenciáljáték fogalom tulságosan általános. A H_1 kifizetőfüggvények tulajdonságaitól függően sokféle feladattípust fogalmazhatunk meg. További osztályozásra ad módot az F függvény alakja. A most következő 3. pontban a differenciáljátékok osztályozásával foglalkozunk.

3. A differenciáljátékok osztályozása.

A differenciáljátékok osztályozásának szempontjait részben a játékelmélet általános szempontjai szolgáltatják, részben a differenciáljátékok speciális tulajdonságai nyújtanak újabb szempontokat. Először az általános osztályozási szempontokat tárgyaljuk, majd a differenciáljátékokhoz kapcsolódó további osztályokat nézzük. A legáltalánosabb osztályozási alapot a játékban résztvevő személyek száma adja. Három alapvetően eltérő játékosztályt szoktak megkülönböztetni:

1. Egyszemélyes játékok.
2. Kétszemélyes játékok.
3. N -személyes játékok.

E három csoport megkülönböztetését az indokolja, hogy mindegyik csoporthoz tartoznak olyan matematikai módszerek, amelyek csak az illető csoport esetében alkalmazhatók. Az egyszemélyes játékok az optimumkeresési feladatokat foglalják magukba, differenciáljátékok esetében pedig a vezérléselmélet problémaköréhez jutunk.

A további osztályozások alapját a H_1 kifizetőfüggvények tulajdonságai képezik. Mielőtt ebbe belemennénk, szükségünk lesz az alábbi fogalomra:

0.11 Definíció: A $\Gamma = \{I, \{S_i\}_{i=1}^N, \{H_i\}_{i=1}^N\}$ és a $\Gamma' = \{I, \{S_i\}_{i=1}^N, \{H_i'\}_{i=1}^N\}$ két játékot ekvivalensnek nevezzük, ha megadhatók olyan $k_i > 0$ és c_i valós számok, hogy

$$H_i = k_i H_i' + c_i \quad /14/$$

Ezt

$$\Gamma \sim \Gamma' \quad /15/$$

formában jelöljük.

Könnyen látható, hogy két ekvivalens játék a stratégia-választás szempontjából egyenértékű, hisz a két kifizetőfüggvényrendszer kitüntetett pontjai /maximum, nyeregpont, stb./ egybeesnek.

0.12 Definíció: Legyen $S' \subset S$ a megengedett szituációk halmaza. A Γ játékot c összegűnek nevezzük, ha a

$$\sum_{i=1}^N H_i \Big|_S = c \quad /16/$$

Megjegyezzük, hogy ha az S -ben minden szituáció megengedett, mint általában a játékelméletben, akkor ez éppen az ott szokásos c összegű játék definíciójával esik egybe.

Könnyen belátható, hogy minden állandó összegű játék egyenértékű egy 0-összegűvel. Ezért a továbbiakban a c -összegű játékot 0-összegűnek tekintjük:

0.13 Definíció: A kétszemélyes 0-összegű játékot antagonisztikus játéknak nevezzük.

Legyen $\Gamma = \{2, \{S_i\}_{i=1}^2, \{H_i\}_{i=1}^2\}$ egy antagonisztikus játék. Ekkor fennáll a $H_1 = -H_2$ kapcsolat. Ezért az antagonisztikus játékokat egyetlen $H: S \rightarrow R$ kifizetőfüggvénnyel jellemez-

hetjük. A 0.2 definícióval meghatározott Nash-féle egyensúly-
ponton pedig olyan $(s_1^*, s_2^*) \in S$ szituációt értünk, amelyre a

$$H(s_1, s_2^*) \leq H(s_1^*, s_2^*) \leq H(s_1^*, s_2) \quad s_1 \in S_1, s_2 \in S_2 \quad /17/$$

feltétel teljesül. Az ilyen $(s_1^*, s_2^*) \in S$ pontot nevezzük a játék
nyerégpontjának. /Ami nem biztos, hogy létezik, és ha létezik
nem biztos, hogy egyetlen ilyen van./ a $H(s_1^*, s_2^*) = v$ szám pe-
dig a játék értéke.

Két további játékosztályt vezetünk be $2 \leq N$ személyes dif-
ferenciáljátékok esetében. Ezek az osztályok azonban már a dif-
ferenciáljátékokhoz kapcsolódnak. E két osztály a kvantitatív
és kvalitatív játékok osztályai. Ezek definíciójához szüksé-
günk lesz a 2. pontbeli fogalmakra és jelölésekre.

Legyen $s \in S$ egy megengedett szituáció /0.8 definíció/.

Legyen $\tilde{Z}(s)$ az alábbi halmaz:

$$\tilde{Z}(s) = \{ \tilde{z} \mid \tilde{z} \text{ az } s \text{ irányítással összeköti } z_0\text{-t és } \Theta\text{-t} \\ a[t_0, t^*(\tilde{z})], t^*(\tilde{z}) \leq t_1 \text{ véges int.-on} \}$$

/ld. a 0.5 definíciót/

A bevezetett halmaz segítségével megadhatunk egy $t^*(s)$ számot
az alábbi definícióval:

$$t^*(s) = \inf \{ t^* \mid \exists \tilde{z} \in \tilde{Z}(s), \text{ hogy } \tilde{z}(t^*) \in \Theta \} \quad /17/$$

0.14 Definíció: A $t^*(s)$ a játék befejeződésének időpont-
ja az s szituációban.

Ezután megadunk két halmazcsaládot:

$$\tilde{Z}_\varepsilon(s) = \{ \tilde{z} \mid \tilde{z} \in \tilde{Z}(s), \text{ melyhez } \exists t^*(s) \leq t < t^*(s) + \varepsilon, t \leq t_1, \\ \text{hogy } \tilde{z}(t) \in \Theta \} \quad /18a/$$

$$Z_{\varepsilon}(s) = \{z \mid z \in \Theta, \exists \tilde{z} \in \tilde{Z}_{\varepsilon}(s), \text{ hogy } z = \tilde{z}(t), t^*(s) \leq t \leq t^*(s) + \varepsilon, \\ t \leq t_1\} \quad /18b/$$

Természetesen mindkét halmaz üres akkor, ha $t^*(s) = \infty$.

Adjuk meg most a Θ halmaznak egy N számú zárt halmazra való felbontását, ahol a szereplő halmazok nem szükségképpen diszjunktak és lehet köztük üres is. Legyen $\Theta = \bigcup_{i=1}^N \Theta_i$, ahol Θ_i zárt $i=1,2,\dots,N$ mellett.

Legyen f_i az $i \in I$ játékoshoz rendelt alábbi függvény:

Ha $\Theta_i \neq \emptyset$, akkor

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Theta_i \\ 0 & x \in G \setminus \Theta_i \end{cases}$$

Ha $\Theta_i = \emptyset$, akkor

/19/

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in G \setminus \Theta \\ 0 & x \in \Theta \end{cases}$$

A bevezetett fogalmak segítségével definiálhatjuk a minőségi, kvalitatív differenciáljátékot:

0.15 Definíció: A $\Gamma = \{I, \{S_i\}_{i=1}^N, \{H_i\}_{i=1}^N\}$ 0.10

definíció szerint megadott differenciáljátékot kvalitatív játéknak nevezzük, ha ekvivalens egy olyan differenciáljátékkal, amelynek kifizetőfüggvényei felírhatók az alábbi formában:

$$H_i'(s) = \begin{cases} -\infty & \text{ha } s \in S \text{ nem megengedett} \\ \lim_{t \rightarrow t_1} f_i(\tilde{z}(t)), & \text{ha } t^*(s) = \infty, \text{ és } \tilde{z} \text{ egy a 0.6} \\ & \text{definíció /2/ feltételének } s\text{-el} \\ & \text{eleget tevő görbe} \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{z \in Z_\xi(s)} f_i(z) & \text{ha } t^*(s) < \infty \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy a \lim és a $\lim \sup$ biztosan léteznek. Ha ugyanis $t^*(s) = \infty$, akkor minden a feltételeknek eleget tevő \tilde{z} görbe a \odot -n kívül halad, akár véges t_1 , akár nem. Itt pedig minden f_i konstans értéket vesz fel /ld. a /19/ definíciót/. A $\lim \sup$ pedig azért létezik, mert $\xi \rightarrow 0$ mellett $Z_\xi(s)$ monoton fogyó halmazrendszer és így a szup is monoton fogyó számsorozatot ad, melynek korlátossága miatt biztosan lesz limesze.

Ha a kvalitatív játék 0-összegű, akkor ez azt jelenti, hogy csupán egyetlen játékos nyerhet, stratégiaválasztástól függően. A terminális pontok ugyanis legfeljebb egyetlen \odot_i halmazhoz tartozhatnak minden s megengedett szituációban minden elég kis $\xi(s)$ mellett. Ha a differenciálegyenlet megoldásaira érvényes az unicitás tétele, akkor ehhez elegendő a \odot_i halmazok diszjunkttségát megkövetelnünk. /Ebből csupán annyi következik, hogy csak egy játékos nyerhet. A 0-összegűséghez legalább egy \odot_i -nek üresnek kell lennie./ Ha nincs unicitás, vagy a \odot_i halmazok nem diszjunktak, akkor nyerhet egyidejűleg több tájékos is.

Ezután definiáljuk a kvantitatív vagy mennyiségi játékokat. Megadunk minden $1 \leq i \leq N$ mellett egy olyan megengedett s

szituációkon értelmezett funkcionált, melyekre $t^{\#}(s) < \infty$

Legyen $Z(z_0, \Theta)$ az alábbi halmaz:

$$Z(z_0, \Theta) = \bigcup_{s \in S'} \tilde{Z}(s), \quad S' \subset S \text{ megengedett sz. halmaza} \quad /21/$$

Legyen

$$I_i: Z(z_0, \Theta) \rightarrow R, \quad 1 \leq i \leq N \quad /22/$$

egy funkcionál.

0.16 Definíció: A $\Gamma = \{I, \{S_i\}_{i=1}^N, \{H_i\}_{i=1}^N\}$ 0.10 definíció szerint megadott differenciáljátékot kvantitativ játéknak nevezzük, ha ekvivalnes egy olyan játékkal, melynek H_i' kifejezőfüggvényeit megadhatjuk az alábbi formában:

$$H_i'(s) = \begin{cases} -\infty & \text{ha } t^{\#}(s) = +\infty \\ \limsup_{\xi \rightarrow 0} \sup_{\tilde{z} \in \tilde{Z}_{\xi}(s)} I_i(\tilde{z}) & \text{ha } t^{\#}(s) < \infty \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy a kvantitativ és kvalitatív játékok osztályai nem diszjunktak. Mint a definíciókból kiderül, kvalitatív játék esetében adott célhalmazt kell elérnünk, illetve elkerülnünk. A kvantitativ játékoknál bármilyen nyeresémény érdekében valamennyi játékosnak érdeke, hogy olyan szituációt válasszanak, amely mellett eléri a \odot célhalmazt. Ez azt jelenti, hogy kvantitativ játék megoldásának szükséges feltétele az, hogy a $\odot_i = \odot, i=1, 2, \dots, N$ melletti kvalitatív játék megoldható legyen nem 0 nyeresémmel. A kvalitatív játékok megoldása tehát alapját képezi valamennyi kvantitativ játék megoldásának, az utóbbi esetben a lehetséges kvalitatív megoldásokból válogatjuk ki az "optimális" megoldást.

További játékosztályokat nyerünk még a játék dinamikáját megadó differenciálegyenlet típusa alapján. Ezek megegyeznek a differenciálegyenleteknél szokásos osztályokkal. Hármát emlí-
tünk meg:

Lineáris a játék, ha a differenciálegyenlet lineáris és az irányítási paraméterek is lineárisan szerepelnek.

Nemlineáris játékelméleti problémáról beszélünk, ha legalább a vezérlési paraméterek nemlineárisan szerepelnek az egyenletben.

Késleltetett információju játékról akkor beszélünk, ha a dinamikát egy késleltetett differenciálegyenlet írja le.

Ezzel áttekintettük a főbb osztályozási szempontokat.

1.§ A fölény kérdése.

Dolgozatunkban N -személyes minőségi játékok egzisztencia-problémáival szeretnénk foglalkozni. Ezeknek a problémáknak alapkérdése a következő: A játékosok egy $K \subset I$ csoportja tud-e egy stratégiát választani, hogy egy másik $K' \subset I$ csoport bármely stratégiaválasztása mellett egy adott peremfeltételt teljesítő /esetleg nem teljesítő/ megoldásgörbét kapjunk? Az ilyen kérdések megválaszolása, mint ezt a történeti résznél már említettük, mindig konstruktív eljárást igényel /ld. [4], [18], [31],[36],[39]/. Ezek az eljárások valamilyen, a dinamikára és a célhalmazra kirótt feltételek teljesülésén alapszanak. A kérdésfeltevésekből is és a történeti részben leírtakból is elég kézenfekvően következik, hogy a fenti feltételek a játékosok szempontjából nem szimmetrikusak.

E §-ban a dinamikára kirótt feltételtípusokkal és ezek kapcsolataival fogunk foglalkozni. Négyféle feltételtípust vezetünk be az alábbi négy feladatnak megfelelően: az adott célhalmaz elérése késleltetés nélkül, késleltetéssel, a célhalmaz elkerülése késleltetéssel és anélkül. Ha a játékosok egy csoportjának lehetősége van célja megvalósítására egy másik csoport akarata ellenére is, ezt úgy mondjuk, hogy fölényben van a másik csoporttal szemben. Erős fölényről akkor beszélünk, ha késleltetett információ esetén is elegendő a cél megvalósítására, gyengéről akkor, ha csupán a másik választásának ismeretében tudunk jól választani az adott időpillanatban. Elfutó fölényről akkor beszélünk, ha ennek megfelelő birtokában a koalíció az adott célhalmaz elkerülésére képes, a célhalmaz

eléréséhez elegendő fölényt fölénynek fogjuk nevezni.

1. Fölény definíciók.

A 0.§ jelöléseit érvényesnek tekintjük az egész dolgozatban, a függelékot leszámítva.

Legyen $K \subset I$ egy valódi részhalmaz, a játékosok ilyen csoportját koalíciónak nevezzük.

A 0.§ 2. pontjában bevezetett K_i halmazok legyenek a továbbiakban kompaktak. Legyen az F leképezés folytonos és legyen eleget minden rögzített $u \in \prod_{i=1}^N K_i$ mellett lokális Lipschitz-féle feltételnek. /A jelöléseket ld. a /7/ kifejezésnél és környékén./

Bevezetjük az alábbi jelöléseket:

Legyen $K \subset I$ egy koalíció.

$$U_K := \prod_{i \in K} K_i \quad /24/$$

Legyen

$$U_K^\perp := \prod_{i \in I \setminus K} K_i \quad /25/$$

Ezzel előkészítettük a fölényfogalmak definícióit.

Legyenek K, K' két koalíció, melyekre teljesül a $K \cap K' = \emptyset$ feltétel. Legyen $e \in E'$, ahol E' az E Banach-tér duálisa és legyen $x_0 \in G \subset E$ rögzített pont.

1.1 Definíció: A K koalíció gyenge fölényben van a K' koalícióval szemben az $x_0 \in G$ pontban az e funkcionállal kijelölt "irányban", ha megadható olyan $c > 0$, hogy minden $v \in U_{K'}^\perp$ -hez található olyan $u(v) \in U_K$, hogy

$$F(x_0, (U_{K \cup K'}^\perp, \{u(v), v\})) \subset \{e \geq c > 0\} \quad /26/$$

teljesül.

1.2 Definíció: A K koalíciónak gyenge elfutó fölénye van a K' -vel szemben az $x_0 \in G$ pontban az e funkcionállal kijelölt "irányban", ha minden $v \in U_K$, -hez van olyan $u(v) \in U_K$, hogy

$$F(x_0, (U_K^\perp \cup K) \times \{(u(v), v)\}) \subset \{e \geq 0\} \quad /27/$$

teljesül.

1.3 Definíció: A K koalíciónak erős fölénye van az x_0 pontban az e funkcionállal kijelölt irányban, ha megadható olyan $u \in U_K$ és $c > 0$, hogy az

$$F(x_0, U_K \times \{u\}) \subset \{e \geq c > 0\} \quad /28/$$

teljesül.

1.4 Definíció: A K koalíciónak erős elfutó fölénye van az x_0 pontban az e funkcionállal kijelölt irányban, ha létezik olyan $u \in U_K$, hogy az

$$F(x_0, U_K \times \{u\}) \subset \{e \geq 0\} \quad /29/$$

teljesül.

Megmutatjuk a bevezetett négy fölényfogalomról, hogy páronként szoros kapcsolatban állnak egymással.

1.1 Tétel: A K koalíciónak akkor és csakis akkor van erős fölénye az x_0 pontban az e funkcionállal kijelölt irányban, ha az $I \setminus K$ koalíciónak nincsen gyenge elfutó fölénye a $-e$ funkcionállal kijelölt irányban.

Bizonyítás: 1. Tegyük fel, hogy a K koalíciónak erős fölénye van az e irányban. Ez azt jelenti, hogy van olyan $u \in U_K$, amely mellett /28/ teljesül. Ezért ezen u -hoz nem található olyan $v(u) \in U_K^\perp$, hogy a /27/ $-e$ -vel teljesüljön.

2. Tegyük fel, hogy az $I \setminus K$ -nak nincs gyenge elfutó fölénye az $x_0 \in G$ pontban a $-e$ irányban. Ez azt jelenti, hogy van olyan $u \in U_K$, hogy minden $v \in U_K^\perp$ mellett az

$$\langle e, F(x_0, \{(u \times v)\}) \rangle > 0 \quad /31/$$

feltétel teljesül. Azonban a

$$\Phi(v) := \langle e, F(x_0, v \times u) \rangle, \quad v \in U_K^\perp \quad /32/$$

függvény, mint két folytonos függvény kompozíciója folytonos és az U_K^\perp kompakt halmazon mindenütt pozitív értékeket vesz fel. Legyen c a Φ függvény pozitív minimuma. A fenti $u \in U_K$ és a c szám teljesítik az 1.3 definíció feltételét. Ezzel a tételt beláttuk.

1.2 Tétel: A K koalíciónak akkor és csakis akkor van gyenge fölénye az e funkcionállal kijelölt irányban az $I \setminus K$ koalícióval szemben, ha az $I \setminus K$ koalíciónak nincsen erős elfutó fölénye a $-e$ irányban.

Bizonyítás: 1. Tegyük fel, hogy a K koalíciónak nincsen az x_0 pontban gyenge fölénye az e irányban. Ez azt jelenti, hogy $1/n$ -hez megadható olyan $u_n \in U_K^\perp$ elem $n=1,2,\dots$ mellett, hogy

$$\langle e, F(x_0, u_n \times U_K) \rangle \leq 1/n \quad /33/$$

Az U_K^\perp kompaktsága folytán az u_n sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat, legyen ez $u_{n_k} \rightarrow u$, ahol $u \in U_K$ a részsorozat határeleme. Minden $v \in U_K$ mellett továbbá $u_{n_k} \times v \rightarrow u \times v$, és a /33/ egyenlőtlenség folytán

$$\langle e, F(x_0, u \times U_K) \rangle \leq 0 \quad /34/$$

teljesül, ami az állítás egyik felét adja.

2. Ha az $I \setminus K$ koalíciónak erős elfutó fölénye van az x_0 pontban a $-e$ irányban, akkor ez azt jelenti, hogy van olyan $u \in U_K^\perp$, hogy minden $v \in U_K$ mellett az

$$\langle e, F(x_0, u \times v) \rangle \leq 0 \quad /35/$$

feltétel teljesül, vagyis ehhez az $u \in U_K^\perp$ -hoz nem adható meg olyan $v(u) \in U_K$, hogy

$$\langle e, F(x_0, u \times v(u)) \rangle > 0 \quad /36/$$

teljesüljön és ezzel az állítást beláttuk.

A most következő két tétel a bevezetett erős és gyenge fölényfogalmakat jellemzik.

Legyen $e \in E'$ egy egységnormájú funkcionál.

1.5 Definíció: Az E Banach téren bevezetjük és $\| \cdot \|_e$ -vel jelöljük az alábbi normát:

$$\| x \|_e = \max \{ \| x \|, | \langle 2e, x \rangle | \} , \quad x \in E \quad . \quad /37/$$

1.3 Tétel: A K koalíció akkor és csak akkor van fölényben a K' koalícióval szemben az $x_0 \in G$ pontban az $e \in E'$ -vel kijelölt irányban, ha megadható olyan $1 > \varepsilon > 0$, és $t \in E$, $\| t \|_e = 1$, $\langle 2e, t \rangle = 1$, hogy minden $v \in U_K$ elemhez található olyan $u(v) \in U_K$ elem, hogy teljesül az

$$F(x_0, U_{K \cup K'}^\perp \times \{ u(v) \times v \}) \subset K_{\varepsilon, t}(0) := \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \{ G_\varepsilon^{\| \cdot \|_e}(0) + t \} \quad /38/$$

Bizonyítás: 1. Tegyük fel, hogy a K koalíciónak fölénye van az e irányban az x_0 pontban a K' felett. Az 1.1 definíció szerint tehát a

$$V := F^{-1}(x_0, \{e \geq c\}) \subset \prod_{i=1}^N K_i \quad /39/$$

halmaz nem üres és a folytonosság miatt kompakt.

Az F leképezésnek a $G \times V$ -re való megszorítása teljesíti a függelék F2.3 tételének feltételeit $c = \delta \cdot h$, $0 < \delta < 1$ mellett ezért igaz, hogy

$$F(x, K) \subset K_{\varepsilon, t}(0) \quad /40/$$

az idézett tétel alapján. Miután az 1.1 definíció feltételének teljesülése és V konstrukciója biztosít olyan $u(v)$ -t minden $v \in U_K$ -hez, hogy

$$U_K^\perp \cup K, \times u(v) \times v \subset V \quad /41/$$

teljesül, az állítás első felét bebizonyítottuk.

2. Teljesüljön a /38/ feltétel valamely $t \in E$, $e \in E'$ és $\varepsilon > 0$ -ra. Belátjuk, hogy ekkor teljesül az 1.1 definíció feltétele.

Képezzük a $G_n := K_{\varepsilon, t}(0) \cap \{e > 1/n\}$ halmazsorozatot $n=1, 2, \dots, n, \dots$ mellett. Képezzük továbbá az alábbi halmazt:

$$H_n = \{u \mid u \in U_K, \text{ és } \exists v(u) \in U_K \text{ hogy } F(x_0, U_{K \cup K}^\perp, \times v(u) \times u) \subset G_n\} \quad /42/$$

hogy H_n nyílt.

Belátjuk, Miután az $U_{K \cup K}^\perp, \times v(u) \times u$ halmaz kompakt metrikus tér, folytonos képe is kompakt, amelyet a fenti G_n nyílt halmazok valamelyike biztosan lefed és e fedő G_n határától véges pozitív δ távolságra van. Am F egyenletesen is folytonos a $\prod_{i=1}^N K_i$ kompakt szorzattéren, ezért $\delta/2$ -höz megadható olyan

$G_{\delta(\delta/2)}(u)$ környezet, hogy minden $u' \in G_{\delta(\delta/2)}(u)$ -beli pontra /42/ feltétele teljesül.

A /38/-al kifejezett feltétel azonban biztosítja, hogy

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = U_K, \quad /43/$$

és miután U_K kompakt, a H_n -ek pedig nyíltak, van olyan véges n , hogy H_n az U_K -t már lefedi. A legkisebb ilyen n legyen n_0 , $c=1/n_0$ mellett teljesül az 1.1 definíció feltétele. Ezzel a tételt maradéktalanul beláttuk.

1.4 Tétel: A K koalíció akkor és csakis akkor van erős fölényben az x_0 pontban az $e \in E'$, $\|e\|=1$ funkcionállal kijelölt irányban, ha megadható olyan $1 > \varepsilon > 0$, és $t \in E$, $\|t\|_e=1$, $\langle 2e, t \rangle = 1$, amelyhez található olyan $u \in U_K$ elem, hogy az

$$F(x_0, u \times U_K^\perp) \subset K_{\varepsilon, t}(0) \quad /44/$$

tartalmazás teljesül.

Bizonyítás: A tételt az 1.3 tételhez hasonlóan bizonyíthatjuk be, csupán egyszerűbben. Itt a bizonyítást nem részletezzük.

A most következő tételek is az erős illetve gyenge fölényt jellemzik, méghozzá e tulajdonságok helytől való függését.

1.6a Definíció: $G_{K,K}^e$ -vel jelöljük az alábbi halmazt:

$$G_{K,K}^e := \{x \mid x \in G\text{-ben } K \text{ gy. fölényben van } K'\text{-vel sz.-ben az } e \text{ irányban}\}$$

1.6b Definíció: G_K^e -val jelöljük az alábbi halmazt:

$$G_K^e := \{x \mid x \in G\text{-ben } K \text{ erős fölényben van az } e \text{ ir.-ban}\}$$

1.6c Definíció: $F_{K,K}^e$, -vel jelöljük az alábbi halmazt:

$$F_{K,K}^e := \{x \mid x \in G \text{-ben } K \text{-nak elf. fölénye van } K' \text{-vel sz.-ben az } e \text{ irányban}\}$$

1.6d Definíció: F_K^e -val jelöljük az alábbi halmazt:

$$F_K^e := \{x \mid x \in G \text{-ben } K \text{-nak erős elf. fölénye van az } e \text{ ir.-ban}\}$$

1.5 Tétel: A $G_{K,K}^e$, és G_K^e halmazok nyitlak.

Bizonyítás: Elegendő megmutatni, hogy ha $x_0 \in G_{K,K}^e$, -nek $/G_K^e$ -nak/, akkor létezik $G_\delta(x_0) \subset G_{K,K}^e$, $/G_K^e/$ alkalmas $\delta > 0$ -val.

Az $x_0 \in G_{K,K}^e$, $/G_K^e/$ azt jelenti, hogy a

$$V := F^{-1} \left(x_0, \{e > h > 0\} \right) \subset \prod_{i=1}^N K_i \quad /45/$$

kompakt halmaz nem üres, sőt az egyes fölényeknek megfelelően tartalmaz bizonyos alakú pontokat.

Szorítsuk meg a F leképezést az alábbi módon:

$$F : G \times V \rightarrow E,$$

erre $h/2$ -vel igaz, hogy

$$F(x_0, V) \subset \{e > h/2\}. \quad /46/$$

V kompaktsága folytán azonban létezik olyan $G_\delta(x_0) \subset G$, hogy

$$F(G_\delta(x_0), V) \subset \{e > h/2\} \quad /47/$$

teljesül. Ez pedig mindkét szóbanforgó fölényfogalomra bizonyítja a tétel állítását.

1.6 Tétel: Az $F_{K,K}^e$, és az F_K^e halmazok zártak.

Bizonyítás: Ezek zártága közvetlen következménye az 1.1,

1.2 tételeknek melyek szerint e halmazok megfelelő G^e típusu halmazok komplementerei, melyek viszont az 1.5 tétel szerint nyíltak.

2. Lokális stratégiák fogalma.

E pontban azzal foglalkozunk, hogy ha a G halmaz valamely pontjában fennáll a bevezetett fölénytípusok közül valamelyik egy koalíció számára, akkor hogyan használhatja fel ezt a koalíció stratégiája megválasztására. Az erős és gyenge fölény alapján képzett stratégiának az a tulajdonsága, hogy egy pont-ra megadott stratégiaválasztási szabály "ugyanazt" eredményezi a pont egy környezetében, mint a pontban, lehetőséget nyújt arra, hogy a stratégiaválasztási szabályt ne pontokhoz, hanem nyílt környezetekhez rendeljük. Ezeket a lokális stratégiaválasztási szabályokat fogjuk lokális stratégiáknak nevezni.

Első lépésként megadjuk most fölény teljesülése esetére a stratégiaválasztási "szabályt".

1.7 Tétel: Legyen a K koalíciónak az $x_0 \in G$ pontban az $e \in E'$, $\|e\| = 1$ irányban fölénye a K' koalícióval szemben. Ekkor megadható egy $V_e: U_K \rightarrow U_K$ Borel-mérhető leképezés úgy, hogy

$$F(x_0, U_{K \cup K'}^\perp, \times V_e(u) \times u) \subset \{e \geq c\} \quad \text{ahol} \quad /48/$$

$c > 0$ az 1.1 definícióban szereplő pozitív szám.

Bizonyítás: Megjegyezzük először is, hogy a bizonyításban lényegtelen a c szám értéke, ennek a tételben csupán a fölény definíciója miatt van szerepe. Ezért tetszőleges c mellett bizonyítjuk a tételt, azért, hogy egyuttal elfutó fölényre is megkapjuk a V leképezés konstrukcióját.

A fölény definíciójából következik, hogy minden $u \in U_K$,
 höz van olyan $v(u)$, hogy az $F(x_0, U_K^\perp \cup K, v(u) \times u) \subset \{e \geq c\}$.
 /Ez a lényeges sajátosság gyenge elfutó fölény esetében $c=$
 0 -val teljesül, ld. az 1.2 definíciót./ Ez azt jelenti, hogy
 minden $w \in U_K^\perp \cup K$, mellett teljesül az

$$F^{-1}(x_0, w, \{e \geq c\}) \supset \{(v(u), u) \mid u \in U_K\} \quad /49/$$

tartalmazás. Másrészt az F folytonossága miatt az

$$F^{-1}(x_0, w, \{e \geq c\}) \subset U_K \times U_K, \quad /50/$$

halmaz kompakt. Képezzük az

$$F = \bigcap_{w \in U_K^\perp \cup K} F^{-1}(x_0, w, \{e \geq c\}) \subset U_K \times U_K, \quad /51/$$

kompakt halmazt, amely a /49/ miatt nem üres, sőt a vetüle-
 te az U_K -re az egész halmaz lesz $p_K(F) = U_K$./

Ekkor azonban a függelék F.1.2 tétele biztosítja, hogy
 megadható olyan

$$V_e : U_K \longrightarrow U_K \quad /52/$$

Borel-mérhető leképezés, amelyre teljesül az

$$F \supset \{(V_e(u), u) \mid u \in U_K\} \quad /53/$$

feltétel, ami azt jelenti, hogy V_e eleget tesz a /48/ felté-
 telnek. Ezzel a tételt beláttuk.

1.1 Megjegyzés: Ha a K koalíciónak erős fölénye van az
 x_0 pontban az $e \in E'$, $\|e\| = 1$ irányban, akkor megadható a

$$V_e(u) := v \in U_K, \quad u \in U_K^\perp \quad /54/$$

konstans leképezés úgy, hogy az /1.2/ definícióval szereplő $c > 0$ -val teljesül az

$$F(x_0, u, V_e(u)) \in \{e \geq c\}, \quad \text{minden } u \in U_K^\perp \quad /55/$$

mellett.

Ez az 1.2 definíció természetes következménye.

1.2 Megjegyzés: Miután felhívtuk a figyelmet arra, hogy az 1.7 tétel bizonyításában nem volt lényeges szerepe a szereplő c konstans értékének és láttuk, hogy ami a tétel bizonyításához szükséges, az teljesül a gyenge elfutó fölényre is, ezért kimondhatjuk külön bizonyítás nélkül az alábbi tételt:

1.8 Tétel: Ha a K koalíciónak gyenge elfutó fölénye van az $x_0 \in G$ pontban a K' koalícióval szemben az $e \in E'$, $\|e\| = 1$ irányban, akkor megadható egy

$$V_e: K' \longrightarrow K \quad /56/$$

Borel-mérhető leképezés úgy, hogy minden $u \in U_K$, -re teljesül az

$$F(x_0, V_e(u), u) \in \{e \geq 0\} \quad /57/$$

feltétel.

1.3 Megjegyzés: Erős elfutó fölény esetében az 1.1 megjegyzés eljárása biztosít egy az /57/-nek eleget tevő V_e leképezést.

A V_e leképezések definíciója után megmutatjuk bevezetett fölény teljesülésének számunkra alapvetően fontos következményét.

1.9 Tétel: Legyen a K koalíciónak a K' koalícióval szemben az $x_0 \in G$ pontban az $e \in E'$, $\|e\| = 1$ irányban fölénye. Ekkor megadható egy alkalmas

$$K_{\varepsilon, h}(0) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \cdot \left\{ G_{\varepsilon}^{h \| u_{\varepsilon}}(0) + h \right\} \quad /58/$$

kup /lásd az 1.5 definíciót/, ahol $\langle e, h \rangle = 1/2$, $\|h\| \sim 1/2$ /azaz közel $1/2$ /, és amelyre teljesül az alábbi:

Megadható a $t_0 \in R$ -hez $(t_0, z_0) = x_0 \in G$ olyan $\sigma > 0$, hogy a K' koalíció bármely $u: [t_0, t_1] \rightarrow U_K$, és az $I \setminus (K \cup K')$ mérhető stratégiaválasztására az

$$x(t) = F(x(t), v(t), v_e(u(t)), u(t)) \quad t \in [t_0, t_1] \text{ m.m.} \quad /59/$$

$$x(t_0) = x_0$$

differenciálegyenlet megoldása teljesíti az

$$x(t) \in x_0 + K_{\varepsilon, h}(0) \quad , \quad t \in (t_0, t_0 + \sigma)$$

feltételt, ahol a V_e az 1.7 tételben biztosított Borel-mérhető leképezés.

1.10 Tétel: Legyen a K koalíciónak erős fölénye az $x_0 \in G$ pontban az $e \in E'$, $\|e\| = 1$ irányban. Ekkor megadható egy alkalmas $K_{\varepsilon, h}(0)$ kup /ld. /58/ /, ahol $\langle e, h \rangle = 1/2$, $\|h\| \sim 1/2$ /azaz közel $1/2$ / és amelyre teljesül az alábbi:

Megadható a $t_0 \in R$ ponthoz $(t_0, z_0) = x_0 \in G$ olyan $\sigma > 0$, hogy az $I \setminus K$ koalíció bármely $u: [t_0, t_1] \rightarrow U_K^\perp$ mérhető stratégiaválasztására az

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F(x(t), u(t), V_e(u(t))) \text{ m.m. } t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned} \quad /60/$$

differentiálegyenlet megoldása teljesíti az

$$x(t) \in x_0 + K_{\xi, h}(0), \quad t \in [t_0, t_0 + \sigma]$$

feltételt, ahol V_e az 1.1 megjegyzésben biztosított konstans leképezés.

Bizonyítás: A két tételt együtt bizonyítjuk.

Képezzük az x_0 G mellett az

$$F^{-1}(x_0, \{e \geq c > 0\}) = V \subset \bigcap_{i=1}^N K_i \quad /61/$$

kompakt halmazt, ahol a c az 1.1 illetve az 1.3 definíciókban biztosított pozitív szám. A V_e leképezés konstrukciója biztosítja, hogy fölény esetén minden $u \in U_K$ és $v \in U_{K \cup K}^\perp$, mellett a $(v, V_e(u), u) \in V$ teljesüljön, erős fölény mellett pedig minden $u \in U_K$ mellett igaz az $(u, V_e(u)) \in V$ feltétel.

Legyenek mármost $u: [t_0, t_1] \rightarrow U_K$, $v: [t_0, t_1] \rightarrow U_{K \cup K}^\perp$, mérhető leképezések, a fentiek alapján

$$(v, V_e(u), u): [t_0, t_1] \rightarrow V \quad /62/$$

mérhető leképezést kapunk, mert V_e Borel-mérhető. Ehhez hasonlóan az $u: [t_0, t_1] \rightarrow U_K^\perp$ erős fölény esetében egy

$$(V_e(u), u): [t_0, t_1] \rightarrow K \quad /63/$$

mérhető leképezést határoz meg. Ezzel azonban előállítottuk az /59/ és /60/ megoldásfüggvényekre a függelék F2.4 tételének

feltételeit, amely a tételeink állításait bizonyítja.

1.4 Megjegyzés: Az 1.9 és 1.10 tételek bizonyításához idézett F2.4 tétel bizonyításából az is kiderül, hogy megadható az x_0 pontnak egy olyan alkalmas $\delta' > 0$ környezete, amelynek minden pontjára érvényes az 1.9 és 1.10 tétel állítása, még hozzá az alábbi formában:

1.11 Tétel: Az 1.9 és 1.10 tételekben szereplő x_0 pontnak megadható olyan $G_{\delta'}(0)$, $\delta' > 0$ környezete, megadható olyan $\delta > 0$ és $K_{\varepsilon, h}(0)$, amelyek minden $x' \in G_{\delta'}(x_0)$ -beli pontra teljesítik az 1.9 illetve az 1.10 tétel állításait, még hozzá az egész $G_{\delta'}(x_0)$ -on univerzális V_e stratégiaválasztással.

1.5 Megjegyzés: Az 1.11 tétel segítségével azt sikerült megmutatnunk erős és gyenge fölények esetében, hogy a $G_{K, K}^e$, illetve a G_K^e nyílt halmazok előállíthatók olyan nyílt környezetek uniójaként, amelyek mindegyikén egy konstans V_e stratégiaválasztási szabály segítségével használhatjuk fel meglevő fölényünket. Legyen most egy $G \subset G_{K, K}^e$, $G \subset G_K^e$ olyan nyílt halmaz, amelynek minden pontjára teljesül az 1.11 tétel állítása, a V_e stratégiaválasztási szabállyal.

1.7 Definíció: $A(V_e, G)$ párt nevezzük a K koalíció lokális stratégiaválasztásának, vagy röviden lokális stratégiájának.

A most következő §-ban megmutatjuk, hogy hogyan lehet a lokális stratégiaválasztási szabályokból felépíteni globális stratégiaválasztási szabályokat.

2.§ A lokális stratégiák szintézise.

Az előző §-ban bevezettük a $KC I$ koalíció fölényének többféle fogalmát és ezek fennállása esetén stratégiaválasztási módszert is adtunk. E módszerről erős illetve gyenge fölény esetében megmutattuk, hogy egy alkalmas nyílt halmazon "megfelelő" választást biztosít. Ezért bevezettük a lokális stratégia fogalmát, amely egy (V_e, G) alakú párt jelent, ahol a V_e egy Borel mérhető leképezés, G pedig az előbb említett alkalmas nyílt halmaz.

Most azt a kérdést vetjük fel, hogy hogyan biztosíthatjuk a lokális stratégiák összekapcsolását? Ez alatt azt kell érteni, hogy ha az /59/ vagy /60/ differenciálegyenletek megoldása a G halmaz valamely határpontjához érkezik, vajon milyen feltételek mellett folytatható a játék e határponton csatlakozó valamely másik (V'_e, G') lokális stratégiaválasztási szabálynak megfelelően? E probléma rokon a szakadási felületek közismert problémájával.

A felvetett problémát két esetben oldjuk meg. A második esetben adott megoldás szinte feltétel nélkül alkalmazható, tétel formájában kimondott finomított változatai mindössze a metrizálhatóságon mulnak és azon, hogy a stratégiákat nyílt halmazokon adjuk meg. Az első, finomabb eljárás szigorú feltételekhez kötött, csak erős vagy gyenge fölény esetében alkalmazható és csupán szeparábilis Banach tereken. Az első módszer feltételeinek megfogalmazásához meg kell fogalmaznunk lokális stratégiák családjának egy folytonossághoz hasonló tulajdonságát.

1. Elnyelési és taszítási pontok.

Bevezetünk egy alapvető fogalmat, amelyet kupmezőnek fogunk nevezni.

Legyen $\Omega \subset G \subset E$ egy nyílt halmaz. Legyen minden $x \in \Omega$ -hoz megadva egy $e(x) \in E$, $\|e\|=1$, és egy $0 < \varepsilon(x) < 1$ szám. Képezzük minden fenti x mellett a $K_{\varepsilon(x), t(x)}^{(0)}$ kupot, ahol $t(x) \in E$, $\langle e(x), t(x) \rangle = 1/2$ és $\|t\|(x) \sim 1/2$ és

$$K_{\varepsilon(x), t(x)}^{(0)} = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \left\{ G_{\varepsilon(x)}^{(0)} + t(x) \right\}. \quad /64/$$

2.1 Definíció: A $\mathcal{K}: x \rightarrow K_{\varepsilon(x), t(x)}^{(0)}$, $x \in \Omega$ leképezéssel és Ω -val képezett (\mathcal{K}, Ω) párt kupmezőnek nevezzük.

2.1 Megjegyzés: Minden lokális stratégiához tartozik egy kupmező, amelyet az 1.11 tétel biztosít.

2.2 Definíció: Az $x \in \bar{F}$ pontot az $F \subset E$ halmaz (\mathcal{K}, Ω) kupmezővel szembeni elnyelési pontjának nevezzük, ha x és van olyan $\delta > 0$, hogy az

$$(K_{\varepsilon(x), t(x)}^{(0)} + x) \cap G_\delta(x) \subset F \cap \Omega$$

feltétel teljesül.

2.3 Definíció: Az $x \in \bar{F}$ pontot az F taszítási pontjának nevezzük, ha az $E \setminus F$ elnyelési pontja.

2.1 Lemma: Ha $x \in \text{int}(F) \cap \Omega$, akkor x elnyelési pont.

Bizonyítás: Ha ugyanis van eleme a metszetnek, ez nem üres nyílt, így van olyan $\delta > 0$, hogy $G_\delta(x) \subset \text{int}(F) \cap \Omega$ ami a tételt bizonyítja.

2.1 Következmény: Taszítási pont csak határpont lehet.

2.2 Következmény: Tetszőleges (\mathcal{K}, Ω) esetén Ω minden pontja \mathcal{K} -val szemben elnyelési pont.

2.4 Definíció: Egy $F \subset E$ halmazt a (\mathcal{K}, Ω) -ra nézve szabályosnak nevezünk akkor, ha $\bar{F} \cap \Omega$ minden pontja taszító vagy elnyelő.

2.1 Tétel: Egy (\mathcal{K}, Ω) kupmezőre nézve szabályos halmazok halmazalgebrát alkotnak, vagyis

1. Ha F_1, F_2 szabályos halmazok, úgy $F_1 \cup F_2$ is az.
2. Ha F_1, F_2 szabályos halmazok, úgy $F_1 \cap F_2$ is az.
3. Ha F szabályos, úgy $E \setminus F$ is az.
4. Az egész tér, E szabályos.

Bizonyítás: A 2.1 lemmára való tekintettel a taszító-elnyelő tulajdonságot elegendő mindegyik esetben a határpontokra belátni.

1. Vegyük a $\partial F_1 \cup \partial F_2$ zárt halmazt / ∂F_i jelöli az F_i halmaz határát, mely zárt/.

Legyen $x \in \partial F_1 \cup \partial F_2$ -nek. Ha x pont legalább az egyikre nézve elnyelési pont, akkor az uniónak is elnyelési pontja lesz, ez természetes következménye a 2.2 definíciónak. Legyen ugyanis mondjuk az elnyelő halmaz az 1 indexű, ekkor a definíció szerint van olyan $G_\delta(x)$, hogy $G_\delta(x) \subset \Omega$ és

$$G_\delta(x) \cap (K_{\varepsilon(x)}, t(x)(0) + x) \subset F_1 \cap \Omega \subset (F_1 \cup F_2) \cap \Omega.$$

Ha az x valamelyiknek belső pontja, akkor a 2.1 lemma szerint elnyelési pont.

Marad tehát annak bizonyítása, hogy ha az x pont egyiknek

sem elnyelési pontja. Ekkor lehet mindkettőnek taszítási pontja, vagy lehet az egyiknek külső pontja, a másiknak taszítási pontja.

Az első esetben $i=1,2$ mellett van olyan $G_{F_i}(x)$, hogy az $E \setminus F_i$ -re teljesül a 2.2 definíció feltétele. De akkor a $\sigma = \min_i \sigma_i$ -re az $(E \setminus F_1) \cap (E \setminus F_2) = E \setminus (F_1 \cup F_2)$ -vel is teljesül a feltétel, tehát a pont taszítási marad.

A második esetben van olyan környezete a pontnak, miután az egyik /mondjuk F_1 / külsejében van, hogy e környezet teljes egészében az F_1 külsejében fekszik. De akkor e környezetnek és az F_2 -re a 2.2 definíció által biztosított környezetnek a metszete éppen megfelel az unióhoz. Ezzel az 1. pontot beláttuk.

3. Ennek bizonyítása azért egyszerű, mert ha egy határpont taszítási pont, ez a komplementernek a 2.3 definíció szerint elnyelési pontja. A komplementer határpontjaira ugyanez érvényes. Ezzel ezt be is láttuk.

4. Az egész tér lezárásának metszete Ω -val Ω , amelynek minden pontja elnyelési pont a 2.2 következmény szerint.

5. A 2. állítás az 1. állításból következik komplementerképzés útján.

2.3 Következmény: A (\mathcal{K}, Ω) bármely szabályos nyílt részhalmazának szabályos részhalmazai is halmazalgebrát alkotnak.

2.2 Lemma: Legyen $\Omega \subset E$ nyílt halmaz és legyen Ω -n megadva egy "állandó" kupmező, azaz a 2.1 definíció jelöléseivel

$$K_{\varepsilon}(x), t(x)^{(0)} = K_{\varepsilon, t}(0). \quad /65/$$

Ekkor megadható egy olyan $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ norma E -n, amelyre

1. $\varepsilon > 0$ mellett $\{\| \cdot \|_K < \varepsilon\}$ szabályos K -ra nézve.
2. A $\| \cdot \|_K$ norma ekvivalens az eredeti $\| \cdot \|$ -val.

Bizonyítás: Belátjuk, hogy a $K_{\varepsilon, t}(0)$ halmaz minden határpontjára teljesül, hogy ha $x \in K_{\varepsilon, t}(0)$, úgy $x + K_{\varepsilon, t}(0) \subset K_{\varepsilon, t}(0)$

Legyen $r \in K_{\varepsilon, t}(0)$, ez előáll

$$r = \lambda t + \lambda v, \quad \lambda > 0 \quad /66/$$

alakban, ahol $\|v\|_e < \varepsilon < 1$, és $\|t\|_e = 1$. Az x határpont pedig $x = \lambda t + \lambda v'$ alakú, ahol $\|v'\|_e \leq \varepsilon$. Ugyanis ha x határpont, úgy megadható egy $\lambda_n t + \lambda_n v_n \rightarrow x$ sorozat úgy, hogy λ_n korlátos és így megadható úgy is, hogy konvergens legyen. Ha λ_0 a konvergens sorozat limeszpontja, ez nem 0, mert x sem az, de akkor osztva λ_n -el sorozat elemeit, v_n -et kifejezhetjük két konvergens sorozat különbségeként és így v_n -ről beláttuk, hogy konvergens és ezért a limeszpont, $\|v'\|_e \leq \varepsilon$ teljesül./

Vegyük az $x + K_{\varepsilon, t}(0)$ pontjait. Ezek előállnak

$$\lambda t + \lambda v' + \bigcup_{\mu > 0} \{G_{\varepsilon}^{\| \cdot \|_e}(0) + t\} \quad /67/$$

alakban, vagy átírva:

$$x + K_{\varepsilon, t}(0) = \left\{ y \mid y = (\lambda + \mu)t + (\lambda + \mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)v + \frac{\mu}{\lambda + \mu}w \right\} \quad /67/$$

ahol megmutatjuk, hogy a $\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}v + \frac{\mu}{\lambda + \mu}w\right) \in G_{\varepsilon}^{\| \cdot \|_e}(0)$.

Felhasználva azonban, hogy 0 ,

$$\left\| \frac{\lambda}{\lambda + \mu}v + \frac{\mu}{\lambda + \mu}w \right\|_e \leq \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\|w\|_e < \varepsilon \quad /69/$$

amivel beláttuk az állítást.

Hasonlóan belátható, hogy a $-K_{\varepsilon,t}(0)$ minden határpontja taszítási pont.

Az e funkcionál definíciójából következik, hogy az $\{-e \leq \sigma\}$, és az $\{e \geq \sigma\}$ halmazok σ tetszőleges valós mellett szabályosak. Ezért képezzük a $G_1 = K_{\varepsilon,t}(0) \cap \{e \leq 1\}$ és a $G_2 = -K_{\varepsilon,t}(0) \cap \{e \geq -1\}$ halmazokat, melyek szintén szabályosak lesznek. E két halmaz segítségével könnyen megadhatjuk a kívánt "gömböt". Szabályos halmaz minden eltoltja szabályos konstans kupmező esetén. A t definíciója alapján $2t \in \{e = 1\}$, képezzük tehát a

$$G(0) := \{G_1 - 2t\} \cup \{G_2 + 2t\} \quad /70/$$

halmazt. Könnyen belátható a kup definíciója alapján, hogy $G(0)$ a 0 egy korlátos, nyílt, konvex, kiegyensúlyozott környezete, ezért az általa meghatározott Minkowsky funkcionál norma lesz, mely egyenértékű az eredeti normával. A $G(0)$ továbbá szabályos és minden számszorosa is az marad. Ezzel a tételt beláttuk.

2.4 Következmény: Legyen E egy szeparábilis Banach tér. Ekkor a 2.2 lemma feltételeinek eleget tevő kupmező alaphalmaza előáll megszámlálható sok szabályos halmaz egyesítéséből.

2.5 Következmény: A 2.4 következményben szereplő előállítás helyettesíthető szabályos halmazokból álló diszjunkt halmazrendszerrel is. Ha ugyanis $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$, ahol G_i szabályos halmaz minden $i=1,2, \dots$ mellett, akkor a

$$G_i := G_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} G_j \right) \quad /70/$$

halmazok a 2.1 tétel alapján szabályosak, egyesítésük pedig, mint ismeretes és könnyen látható az egész G .

Ezzel eljutottunk oda, hogy megfogalmazhatjuk a szintézis problémáját és megoldási lehetőségeit vizsgáljuk Banach tereken és véges dimenziós tereken.

2. Szintézis probléma kompatibilis stratégiáknál.

Lokális stratégiák szintéziséen egy olyan stratégiaválasztási módszer megadását értjük, amely a fázistér minden pontjában egyértelműen adja meg a stratégia megválasztásának a módját és emellett minden pontban egybeesik valamelyik lokális stratégiával. Mint ismeretes, ez a probléma általában nem oldható meg /Ld. a szakadási felületek problémáit a variációs módszereknél/. A globális stratégiaválasztási módszernek olyan-nak kell ugyanis lennie, hogy minden pontban a játékot leíró differenciálegyenlet rendelkezze egy $(t, t + \delta(t))$ intervallumon legalább is lokálisan egyértelmű megoldással. Ehhez pedig az szükséges, hogy ha egy lokális stratégia alkalmazási területének egy határpontjához érünk, e határponton megadott új stratégiával az új lokális stratégia érvényességi területén maradjon a fázispont legalább egy kis időintervallumra. Más szóval, az új stratégiának e pont elnyelési pontja legyen. Általában ez nem vihető keresztül és ezért a hely függvényében egyértelmű stratégiaválasztási módszer megadásának feladatát pontonként véges választási lehetőségre enyhítjük. Ez utóbbiról látni fogjuk, hogy szinte korlátozás nélkül megoldható. Most először az első, nehezebb feladatot fogalmazzuk meg pontosan és bizonyos feltételek mellett megoldjuk. A második problémával a 3. pontban foglalkozunk.

Legyen $\Omega \subset G \subset E$ egy nyílt részhalmaz. Tegyük fel, hogy megadtunk lokális stratégiák egy $\{V_{e_\alpha}, G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ családját úgy, hogy teljesüljön az

$$\Omega = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \quad /72/$$

feltétel. Mint ezt az 1.11 tételben beláttuk, e stratégiacsaládhoz tartozik kupmezőknek egy $(K_\alpha, G_\alpha)_{\alpha \in A}$ családjá és ha a (K_α, G_α) párokat az 1.11 tétel feltételeinek megfelelően képeztük, akkor még az is igaz, hogy ezek konstans kupmezők lehetnek.

2.5 Definíció: Kupmezőknek egy $\{K_\alpha, G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ családját az $x \in \Omega$ pontban kompatibilisnek nevezzük, ha megadható olyan $G_\alpha(x)$ környezet és egy x -től függő $K_{\varepsilon(x), t_\alpha(x)}^{(0)}$ kup, hogy minden $\alpha \in A$ mellett $y \in G_\alpha(x) \cap G_\alpha$ esetén

$$K_{\varepsilon(x), t_\alpha(x)}^{(0)} \supset K_{\varepsilon_\alpha(y), t_\alpha(y)}^\alpha \quad /73/$$

2.6 Definíció: Kupmezők egy $(K_\alpha, G_\alpha)_{\alpha \in A}$ családjá az $\Omega \subset G \subset E$ halmazon kompatibilis, ha minden $x \in \Omega$ -ban kompatibilis.

Legyen most E szeparábilis Banach-tér. Megadunk $\Omega \subset G \subset E$ -n egy K kupmezőt a következőképpen:

$$K_{\varepsilon(x), t_\alpha(x)}^{(0)} := \text{co} \bigcup_{\substack{\alpha \in A \\ x \in G_\alpha}} K_{\varepsilon_\alpha(x), t_\alpha(x)}^\alpha \quad /74/$$

ahol co a mögötte álló halmaz konvex burkát jelöli.

Ha az eredeti $\{K_\alpha, G_\alpha\}$ rendszer kompatibilis volt, úgy a \mathcal{K} kupmező minden pont egy alkalmas környezetében egy konstans kuppal "majorálható". Az így bevezetett jelölések mellett az alábbi tételt mondhatjuk ki:

2.2 Tétel: Legyen $\{V_\alpha, G_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha = \Omega \subset G \subset E$ lokális stratégiák egy olyan családja, hogy a neki megfelelő kupmezők $\{K_\alpha, G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ családja teljesítse Ω -n kompatibilitás feltételét. Ekkor megadható egy $\{B_i\}_{i=1}^\infty$, a /74/-el definiált $\{K, G\}$ kupmezővel szemben szabályos halmazokból álló olyan diszjunkt halmazrendszer, amely teljesíti az alábbiakat:

$$1. B_i \subset G_{\alpha_i}, \quad i=1, 2, \dots$$

$$2. \bigcup_{i=1}^\infty B_i = \Omega$$

$$3. \bigcup_{i=1}^\infty B_i \text{ nyílt halmaz.}$$

4. Minden $x \in \Omega$ -hoz megadható egy és csakis egy olyan $B_i(x)$, hogy az x a $K_{\alpha_i}(x)$ kupmezővel szemben elnyelési pontja $B_i(x)$ -nek.

Bizonyítás: Vegyük minden x körül azt a $G_{\delta(x)}(x)$ környezetet, amelyet a kompatibilitás /72/ feltétele biztosít.

Képezünk Ω -nak egy $(\alpha, x) \in A \times \Omega$ -val indexelt, a $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ és $\{G_{\delta(x)}(x)\}_{x \in \Omega}$ fedőrendszereknél finomabb $G_{\alpha, x} := G_\alpha \cap G_{\delta(x)}(x)$ nyílt halmazokból fedőrendszerét és a $G_{\alpha, x}$ halmazon a $V_{\alpha, x}$ stratégiát a V_α stratégia megszorításaként definiáljuk. Minden $G_{\alpha, x}$ -en egy konstans kupmezőt is definiálunk a K_x kompatibilitás által biztosított kuppal. Ritkítsuk meg e fedőrendszer halmazait úgy, hogy minden x -hez egy olyan $G_\alpha(x)$, x -et válasszunk ki, melyre teljesül, hogy $x \in G_\alpha(x)$, x . A 2.2 lemma minden $G_\alpha(x)$, x halmazhoz

biztosít egy a K_x kuphoz tartozó olyan $\| \cdot \|_{K_x}$ normát, amely ekvivalens az eredeti normával és a $G_{\delta(x)}^{K_x}(0) + x \subset G_x(x)$, x halmaz szabályos a K_x -el szemben. Jelöljük egyszerűség kedvéért az x pont e szabályos környezetét G_x -el és helyettesítsük az Ω halmaz $\{G_x(x), x\}_{x \in \Omega}$ fedőrendszerét a $\{G_x\}_{x \in \Omega}$ szabályos halmazokból álló nyílt fedőrendszerrel. A tér metrizálhatósága és szeparabilitása folytán azonban e nyílt fedőrendszerből kiválasztható megszámlálható részrendszer is, mely már lefedi Ω -t. Legyen e rendszer $\{G_{x_i}\}_{i=1}^{\infty}$.

Képezzük a

$$B_i := G_{x_i} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} G_{x_j} \quad /75/$$

diszjunkt szabályos halmazokból álló fedőrendszert. Ennek 1-4 tulajdonságai a konstrukció alapján világosan teljesülnek.

Talán a 4. pontot érdemes meggondolni: A diszjunkság következtében minden $x \in \Omega$ csak egy B_{i_0} -nek lehet eleme. Ha ennek belső pontja, akkor a 4. állítás teljesül. Ha határpont és elnyelési pont, akkor is készen vagyunk. Ha azonban tasztási pontja, akkor vegyük az első i_0 darab B_{i_1} halmaz egyesítését. Ez nyílt, x ennek belső pontja /ld. a 3. állítást/ van egy környezete, mely ezen unióhoz tartozik és a /74/ kupnak ezzel vett metszete is ide tartozik. E metszet egy x körüli alkalmas környezetének azonban benne kell lennie valamelyik halmazban, különben legalább egyikük nem volna szabályos halmaz. Ahol e metszet van, annak lesz x elnyelési pontja, a diszjunkság miatt pedig világos, hogy csupán egy ilyen lehet.

2.6 Következmény: Jelölje V az alábbi leképezéseket a 2.2 tétel feltételeinek teljesülése esetén:

$$\begin{aligned} V : \Omega \times U_K &\longrightarrow U_K && \text{gyenge fölény mellett} \\ V : \Omega \times U_K^\perp &\longrightarrow U_K && \text{erős fölény mellett} \end{aligned} \quad /76/$$

ahol

$$V(x, u) := V_{\alpha_i}(u) \quad , \text{ ha } x \in B_i \quad /77/$$

ahol $u \in U_K$, az első esetben, $u \in U_K^\perp$ a második esetben, és a 2.2 tétel jelöléseit használtuk. Legyen $x_0 \in \Omega$ tetszőleges pont. Ekkor az

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ x(t) &= F(x(t), v(t), V(x(t), u(t))) \quad , u(t) \end{aligned}$$

illetve

$$\dot{x}(t) = F(x(t), v(t), V(x(t), v(t))) \quad /78/$$

differenciálegyenleteknek létezik megoldása, és pedig minden $x(t) \in \Omega$ mellett egy $(t, t + \delta(t))$ intervallumon lokálisan egyértelműen folytatható.

Bizonyítás: Ez az 1.11 tételnek és a most bizonyított tételnek közvetlen következménye. Az 1.11 tétel szerint ugyanis minden B_i belsejében az állítás igaz. A 2.2 tétel 4. pontja szerint továbbá mindegyik B_i halmaz bármelyik határpontjáról valamelyik B_j halmaz belsejébe folytatódik a megoldás és így újból az 1.11 tétel biztosítja a következmény állításának helyességét.

A szabályos halmazok algebrájának még egy érdekes sajátosságát mutatjuk meg végesdimenziós terek esetében.

Legyen E végesdimenziós.

Legyen $\{K, G\}$, $G \subset E$ nyílt egy egyelemű kompatibilis kupmezőcsalád.

Legyen $G' \subset G$ tetszőleges.

2.3 Tétel: $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $H \subset G'$ szabályos halmaz, hogy ha $\rho(x, \partial G')$ jelöli az $x \in E$ pont távolságát G' határától, akkor

$$\sup_{x \in \partial H} \rho(x, \partial G') < \varepsilon \quad /79/$$

Bizonyítás:

1. Legyen a $\overline{G'}$ kompakt. Ez esetben képezzük a

$$G'_\varepsilon = \{x \mid x \in G', \rho(x, \partial G') \geq \varepsilon\} \quad /80/$$

kompakt halmazt. A 2.2 tétel alapján a G' halmazt előállítjuk nyílt szabályos halmazok megszámlálható monoton növekedő uniójaként. A G'_ε -t kompaktsága miatt e sorozat valamely véges indexű eleme már lefedi és e szabályos halmaz teljesíti a tétel állítását.

2. Ha $\overline{G'}$ nem kompakt, akkor képezzük a

$$G'_{\varepsilon, n} = \{x \mid x \in G', \rho(x, \partial G') \geq \varepsilon, n-1 \leq \|x\| \leq n\} \quad /82/$$

kompakt halmazokat. Ezek ε sugarú nyílt környezetét véve G' -beli nyílt halmazt kapunk, amely teljesíti az 1. feltételét és ebben megadhatjuk a $G'_{\varepsilon, n}$ kompakt halmaznak egy kellőképpen finom szabályos fedőhalmazát. Legyenek e halmazok H_n , $n=1, 2, \dots$. A keresett approximáló halmaz

$$H := \bigcup_{n=1} H_n \quad /83/$$

lesz, ugyanis könnyen belátható, hogy a szóbanforgó halmazok közül tetszőleges $x \in \Omega$ pont egy δ sugaru környezetébe csupán véges számú metsz bele. Ezzel pedig a tételt beláttuk.

3. Szintézis nemszeeparábilis tereken.

Az előző pont elején vázolt két szintézisprobléma közül kompatibilis stratégiacsaládok esetére módszert adtunk a nehezebb, helytől függő globális stratégia feladatának megoldására. Adósak maradtunk azonban a gyengébb, de általánosabb feltételek mellett érvényes ígért megoldási módszerrel. Ehhez csupán annyit fogunk felhasználni, hogy a lokális stratégiákat nyílt halmazokon adjuk meg. E módszernél az sem lényeges, hogy a stratégiához rendelhető egyáltalán kupmező. Míg az előző pont módszerei a határpontok elnyelési, taszítási tulajdonságain multak, ez esetben azt a tényt fogjuk felhasználni, hogy ha egy lokális stratégia nyílt alaphalmazának belső pontját irom elő kezdetiértékproblémának, akkor a megoldásgörbe biztosan e nyílt alaphalmazban halad egy kis időintervallumon. Vagyis az előző pont elnevezésével élve, nyílt halmaz minden pontja elnyelő, függetlenül attól, hogy van-e az egész tértől különböző kup, mely eleget tesz az 1.11 tétel feltételeinek.

Ennek alapján tulajdonképpen módszerünk igen egyszerű:

Iegyen $\{V_\alpha, G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ lokális stratégiák egy családja, melynek alaphalmazai lefedik E valamely Ω részhalmazát. Tegyük fel, hogy az $x(t)$ megoldásgörbe valamely G_α -ban haladva annak határpontjához érkezett. Ha ez Ω belső pontja, ugy van olyan $G_{\alpha'}$, hogy lefedi e határpontot. De $G_{\alpha'}$ nyíltsága miatt ennek belső pontja, ezért a $V_{\alpha'}$ stratégiával folytathatjuk a

játékot, egy időintervallumon. Nem kizárt azonban, hogy az új stratégiával a fázispont visszamegy a G_α -ba, de most ott nem a V_α stratégiát alkalmazza. Vagyis ezzel az összekapcsolási módszerrel a választott stratégia nem csupán a hely függvénye, hanem bizonyos pályapontokban hozott döntéseké is.

Az alább bebizonyítandó tételek két ponton finomítják a fenti ötletet:

1. Minden döntési pontban véges számú stratégia között kell döntenünk.

2. Minden G_α halmazban korlátozzuk a belépésre felhasználható pontok halmazát. Ezzel némiképpen megszorítjuk a túlságosan gyakori stratégiaváltás szükségességét.

Tekintsük A -t teljesen rendezett halmaznak.

2.4 Tétel: Legyen $\{V_\alpha, G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ lokális stratégiák egy osztálya. Ekkor megadható minden $\alpha \in A' \subset A$ mellett egy nem üres $G'_\alpha \subset G_\alpha$, $\overline{G'_\alpha} \subset G_\alpha$ nyílt halmazokból álló halmazrendszer úgy, hogy

$$1. \bigcup_{\alpha \in A'} G'_\alpha = \Omega = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

2. $\{G'_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ lokálisan véges rendszer

3. Minden $\alpha \in A'$ esetén van olyan $x \in G'_\alpha$, hogy $x \notin G'_{\alpha'}$, ha $\alpha' \neq \alpha$, $\alpha' \in A'$.

4. Legyen $p \in \Omega$. Rendeljük p -hez az alábbi $\alpha(p) \in A'$ elemet:

$$\alpha(p) := \min\{\alpha \mid \alpha \in A', p \in G'_\alpha\} \quad /84/$$

Bizonyítás: Miután Ω metrizálható tér, parakompakt.

Ez azt jelenti, hogy megadható a $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ fedőrendszerének olyan $G'_\alpha \subset \overline{G'_\alpha} \subset G_\alpha$ nyílt finomítása, hogy G'_α lokálisan

véges fedőrendszer.

Legyen $A_1 \subset A$ az a részhalmaz, amelyre $\alpha \in A_1$ mellett $G'_\alpha \neq \emptyset$.

Ha van olyan $\alpha \in A_1$, hogy $G'_\alpha \subset \bigcup_{\alpha' \in A_1} G'_{\alpha'}$, akkor hagyjuk el az ilyen α -t A_1 -ből. A Zorn lemma segítségével könnyen belátható, hogy van olyan minimális $A' \subset A_1$, melyből már nem lehet elhagyni ilyen uton α -t. Ez teljesíti a 3. feltételt.

Végül a 4. pont állításához azt jegyezzük meg, hogy azoknak az α -knak a halmaza, amelyre a /84/-ben a minimumot kell képeznünk, véges a lokálisan végeesség miatt és teljesen rendezett halmaz véges részhalmazának van minimális eleme.

2.7 Definíció: $A \{ G_\alpha \}_{\alpha \in A}$, $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha = \Omega$ fedőrendszerhez hozzárendelünk egy függvényt a következő definícióval:

$$h(x) := \sup \{ \delta \mid \delta\text{-hoz } \exists \alpha(\delta) \in A, \text{ hogy } G_\delta(x) \subset G_{\alpha(\delta)} \}$$
 ha $x \in \Omega$.

2.3 Lemma: A bevezetett h függvény eleget tesz globális Lipschitz-féle feltételnek 1 Lipschitz-féle állandóval.

Bizonyítás: Legyen $x \in \Omega$ rögzített pont.

Legyen $x \in G_{h(x)/2}(x)$ tetszőleges pont. Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges elég kicsi szám, úgy megadható olyan $G_{\alpha(\varepsilon)}$ fedőhalmaz, hogy $G_{h(x)-\varepsilon}(x) \subset G_{\alpha(\varepsilon)}$. Másrészt ha $h(x)/2 \leq h(x) - \varepsilon$ akkor a $G_\delta(x') \subset G_{\alpha(\varepsilon)}$, ha $\delta = h(x) - \varepsilon - \|x - x'\|$. Ez azonban azt jelenti, hogy miután ε tetszőleges volt, a $h(x') \geq h(x) - \|x - x'\|$. Az x és x' szerepét felcserélve megkapjuk a lemma állítását.

2.5 Tétel: Legyen $\{ V_\alpha, G_\alpha \}_{\alpha \in A}$ lokális stratégiák egy osztálya és legyen $0 < \mu < 1$ valós szám. Megadható egy

$\{G'_\beta\}_{\beta \in B}$ lokálisan véges nyílt fedőrendszere Ω -nak úgy, hogy teljesülnek az alábbi feltételek:

1. Minden $\beta \in B$ -hez tartozik egy $\alpha(\beta) \in A$ úgy, hogy $G'_\beta \subset G_{\alpha(\beta)}$

2. A $\{G'_\beta\}_{\beta \in B}$ fedőrendszer teljesíti a 2.4 tétel

3. feltételét.

3. Minden $\beta \in B$ mellett $\vartheta(G'_\beta, \partial G_{\alpha(\beta)}) \geq (1-\mu) \sup_{x \in G'_\beta} h(x)$ ahol $h(x)$ a $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ rendszerhez a 2.7 definícióval hozzárendelt függvény.

4. Legyen $p \in \Omega$ tetszőleges, válasszuk $G_{\alpha(p)}$ -t az alábbiak szerint:

$$\alpha(p) := \min \{ \alpha(\beta) \mid \beta \in B \text{ és } p \in G'_\beta \}$$

Bizonyítás: 1. Vegyük $x \in \Omega$ esetén az x körüli $G_{\delta(x)}(x)$ környezetet, ahol $\delta(x) = h(x) \cdot \mu/3$. E környezetben a 2.3 lemma miatt igaz, hogy $h(y) \leq h(x)(1 + \mu/3)$.

2. Található olyan $\alpha(x) \in A$, hogy ha $\delta' = (1 - \mu/3) h(x)$, akkor $G_{\delta'}(x) \subset G_{\alpha(x)}$ -nek.

3. Belátjuk, hogy bármely $y \in G_{\delta'}(x)$ -re a $\vartheta(y, \partial G_{\alpha(x)}) > (1 - \mu) \sup_{z \in G_{\delta'}(x)} h(z)$.

A bal oldal $h(x)(1 - 2\mu/3)$, míg a jobb oldalnak a bizonyítás 1. pontja alapján felső becslését adja az $(1 + \mu/3)h(x)(1 - \mu)$. A jobb oldalon álló kifejezés helyett e nála nagyobb $h(x)(1 - 2\mu/3 - \mu^2/3)$ kifejezést beírva megkapjuk az állítást.

4. Ezután az így kapott $\{G_{\delta'}(x)\}_{x \in \Omega}$ fedőrendszerre alkalmazva a 2.4 tételt, megkapjuk a kívánt fedőrendszert, a $B \subset \Omega$ indexhalmazzal, amely a fentiek miatt teljesíteni fogja a tételünk állításait.

Legyen $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, legyen $z: [t_0, t_1] \rightarrow \Omega$ egy folytonos leképezés és legyen $\{G_\alpha, G'_\alpha\}$ két nyílt fedőrendszere Ω -nak, $\overline{G'_\alpha} \subset G_\alpha$, $\alpha \in A$ mellett és legyen G'_α lokálisan véges. A z görbe döntési pontjain az alábbi pontokat értjük: $\{z(t_0), z_1, z_2, \dots, z_k, \dots\}$ amelyeket teljes indukcióval az alábbiak szerint adunk meg:

Rendeljünk $z(t_0)$ -hoz egy G'_{α_0} -t, amelyre teljesül, hogy $z(t_0) \in G'_{\alpha_0}$. Legyen $z_1 \in G_{\alpha_0}$ -nak az a határpontja, melyre $z(t^*) = z_1$, ahol $t^* = \sup \{t' \mid z([t_0, t']) \subset G_{\alpha_0}\}$. Nevezzük e pontot a G_{α_0} -ból való kilépési pontnak. Rendeljünk z_1 -hez egy $\alpha_1 \in A$ indexet, mely ismét teljesíti a $z_1 \in G'_{\alpha_1}$ feltételt. Az ebből való kilépési pont legyen z_2 , stb.

2.7 Következmény: Legyen most $\{V_\alpha, G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ lokális stratégiák egy családja. Legyen $A' \subset A$ a 2.4 illetve $\alpha(B) \subset A$ a 2.5 tételben biztosított rész indexhalmazok és legyen $\{G'_\alpha\}_{\alpha \in A} / \{G'_\beta\}_{\beta \in B}$ az idézett tételekben biztosított lokálisan véges fedőrendszerek. Legyen most z egy tetszőleges folytonos Ω -ban haladó görbe $z(t_0)$ kezdőponttal. Adjuk meg a $\{G_\alpha, G'_\alpha\}_{\alpha \in A} / \{G_{\alpha(A)}, G'_{\beta(B)}\}_{\beta \in B}$ fedőrendszerpárhoz úgy a z görbe döntési pontjait, hogy minden z_i döntési pontban az $\alpha(z_i)$ indexet válasszunk, amelyet a 2.4 illetve 2.5 tételek 4. pontja biztosít. Könnyen látható, hogy így adott görbe esetén a döntési pontok csak a kezdőpontnak és a görbének a függvényei.

Legyen most a fenti z görbére a bevezetett döntési pontokkal t_i^* , $i=1, \dots$, az az időpont, melyre $z(t_i^*) = z_i$.

$A \{V_\alpha, G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ lokális stratégiákból képzett globális

stratégián az alábbi leképezést értjük:

$$V: C([t_0, t_1], \Omega) \times \Omega \times U_K \longrightarrow U_K$$

ahol a $C([t_0, t_1], \Omega)$ a $[t_0, t_1]$ intervallumon értelmezett Ω -beli értékű folytonos görbéket jelöli és V nem az egész szorzathalmazon van megadva az alábbi definícióval:

Ha $z \in C([t_0, t_1], \Omega)$, és $x = z(t)$, ahol $t \in [t_1^*, t_{i+1}^*]$ akkor

$$V(z, x, u) := V_{\alpha}(z_i)(x, u) \quad /85a/$$

ha $i=1, 2, \dots$, illetve z_i helyén $z(t_0)$ szerepel, ha $t \in [t_0, t_1^*]$.

2.8 Következmény: Az

$$x(t_0) = x_0, \quad ,$$

$$\dot{x}(t) = F(x(t), v(t), V(x, x(t), u(t)), u(t))$$

illetve

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t), V(x, x(t), u(t)))$$

differentiálegyenleteknek létezik megoldása bármely mérhető $v(t) \in U_{K \cup K}^\perp$, $u(t) \in U_K$, illetve U_K^\perp mellett és minden t mellett a megoldás értelmezési tartományából megadható egy $\delta(t)$, hogy a megoldás a $[t, t + \delta(t)]$ intervallumon egyértelmű is.

Bizonyítás: A megoldás konstrukciója könnyen elvégezhető, mert az x_0 -nál megválasztott $G_{\alpha}(x_0)$ -ban a $V_{\alpha}(x_0)$ segítségével megoldhatjuk az egyenletet. Ezzel megkapjuk z_1 -et, ahonnan folytathatjuk a megoldást z_2 -ig, stb. A lokális egyértelműség pedig abból adódik, hogy minden választott nyílt halmazon teljesül e feltétel.

Egyszerűség kedvéért a V globális stratégiában nem fogjuk

kiírni a továbbiakban azt, hogy mely görbe mentén vesszük a V -t, differenciálegyenletünk segítségével ezt ugyanis megkapjuk, csak a pályapontot írjuk majd ki.

3.§ Alkalmazások.

E befejező §-ban általános jellegű alkalmazásokat mutatunk be. A 0.15 definícióval megadott minőségi játékkal foglalkozunk. Az alábbi két problémát tárgyaljuk:

1. A K koalíciónak az a célja, hogy egy K' koalíció ne tudja elérni az $\bigcup_{i \in K} \odot_i$ halmazt.

2. A K koalíciónak az a célja, hogy elérje az $\bigcup_{i \in K} \odot_i$ halmazt, ahol mindkét halmaz a $G \subset E$ nyílt halmaz zárt rész-halmaza. E halmazokat e § során \odot_K illetve $\odot_{K'}$ -vel jelöljük.

Két alaptételt mondunk ki, melyek alkalmazásaiként két elfogási és két elfutási tételt bizonyíthatunk, késleltetett illetve nem késleltetett esetekben.

További két tételt mondunk ki Hilbert terek esetére, konvex célhalmazokkal és belátjuk, hogy konvex halmaz \mathcal{E} sugaru környezetén kívülmaradásra szükséges és elegendő feltétel adható. Végül egy numerikus eljárást is adunk, amely konvex halmaz \mathcal{E} sugaru környezetén kívül maradásra késleltetett és nem késleltetett esetben mindig működik, ha az elfutás említett szükséges és elegendő feltétele teljesül. Ellenkező esetben ugyanez a módszer elfogásra is alkalmas.

1. Elfogási és elfutási alaptételek.

Az alaptételek bizonyítása előtt belátunk néhány lemmát.

Legyen E a 0.§-ban bevezetett Banach-tér, legyen továbbá $H \subset E$ egy zárt részhalmaz. Jelöljük továbbá $\rho(x, H)$ -val az $x \in E$ pontnak H -tól mért távolságát, melynek definíciója közismert.

3.1 Lemma: $1 > \varepsilon > 0$ -hoz és $x \in E$ -hez található olyan $y(x) \in \partial H$, hogy

$$\varrho(x, H) \leq \|x - y(x)\| \leq (1 + \varepsilon \cdot \varrho(x, H)) \varrho(x, H) \quad /85/$$

teljesüljön.

Bizonyítás: Ez az állítás a $\varrho(x, H)$ definíciója alapján nyilvánvaló.

3.1 Definíció: A $\varrho(\cdot, H)$ távolságfüggvényt az $x \in E$ pontban simának nevezzük, ha megadható egy $G_{\delta'(x)}(x)$ környezet egy $e_x \in E'$, $\|e_x\| = 1$, $\forall x_1, x_2 \in G_{\delta'(x)}(x)$ -hez $\|e_{x_1}, x_2\| < C \cdot \varrho(x, H)$, és egy $\alpha_{x_1, x_2} \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $e_{x_1}, x_2 \in E'$,

$$\varrho(x_i, H) = \langle e_x + e_{x_1, x_2}, (x_1 - y(x)) \rangle + \alpha_{x_1, x_2} \quad /86/$$

ahol $\langle e_x, x - y(x) \rangle = \|x - y(x)\|$ és $i=1, 2$. A $C > 0$ állandó.

3.2 Lemma: Ha az $x \in E$ pont a $\varrho(\cdot, H)$ távolságfüggvénynek simasági pontja, akkor a 3.1 definíció alapján megadható e_x funkcionálhoz található olyan $G_{\delta'(x)}(x)$ környezete x -nek

$\delta'(x) < \delta'(x)$, hogy $\delta(x) < \varepsilon \cdot \varrho(x, H)$ és teljesül az

$$(1 - \varepsilon \cdot \varrho(x', H)) \cdot \varrho(x', H) < \langle e_x, x' - y(x) \rangle < (1 + \varepsilon \cdot \varrho(x', H)) \varrho(x', H), x' \in G_{\delta'(x)}(x) \quad /87/$$

Bizonyítás: Azt kell csupán megmutatnunk, hogy van ilyen környezet. A 3.1 definíció biztosítja a $G_{\delta'(x)}(x)$ környezetet, amelynek x eleme. A /87/ egyenlőtlenség teljesül továbbá magára az x pontra és mindkét szereplő egyenlőtlenség határozott lévén és folytonos függvények szerepelnek benne, így mindegyik egy-egy nyílt halmazon teljesül, melyeknek van közös pontja, az x maga. De ez már a lemmát bizonyítja.

3.3 Lemma: Legyenek $x_1, x_2 \in G_{\delta'(x)}(x)$, két tetszőleges pont.

Ekkor a /86/-ban szereplő α_{x_1, x_2} -re teljesül az alábbi becslés:

$$|\alpha_{x_1, x_2}| \leq (\varepsilon(4+c)+c) \cdot \vartheta^2(x, H) \quad /88/$$

feltéve, hogy $\vartheta(x, H) < 1$.

Bizonyítás: Rendezzük át a /86/ kifejezést:

$$\alpha_{x_1, x_2} = \vartheta(x_1, H) - \langle e_x, x_1 - y(x) \rangle - \langle e_{x_1, x_2}, x_1 - y(x) \rangle$$

ahol alkalmazhatjuk a /87/ becslést, amelynek alapján

$$|\alpha_{x_1, x_2}| < \varepsilon \cdot \vartheta^2(x_1, H) + c \cdot \vartheta(x, H) \cdot \|x_1 - y(x)\| \quad /89/$$

Ám a Lipschitz féle feltételnek eleget tesz a ϑ függvény, ezért a $\delta(x) < \varepsilon \cdot \vartheta(x, H)$ felhasználásával

$$\vartheta^2(x_1, H) \leq \vartheta^2(x, H) + 2\varepsilon \cdot \vartheta^2(x, H) + \varepsilon^2 \cdot \vartheta^2(x, H) \leq (1+3\varepsilon) \vartheta^2(x, H)$$

és

$$\|x_1 - y(x)\| \leq \vartheta(x, H) + 2\varepsilon \cdot \vartheta^2(x, H)$$

ahol felhasználtuk, hogy a $\vartheta(x, H) < 1$ és ezért alacsonyabb hatványok beírásával növeltünk.

Ezeket mind beírva és ismét alkalmazva a fenti hatványozáscsökkentéssel való növelést:

$$|\alpha_{x_1, x_2}| \leq (\varepsilon(4+c)+c) \cdot \vartheta^2(x, H) \quad /90/$$

Ezzel pedig a tételt beláttuk.

3.4 Lemma: Megadható olyan ε és c -től függő $\gamma > 0$ szám és $c_1, c_2 > 0$ állandók, hogy ha $\gamma > \vartheta(x, H)$, akkor bármely $x_1, x_2 \in G_{\delta(x)}(x)$ mellett minden $x' \in G_{\delta(x)}(x)$ esetén

$$c_2 \varphi(x', H) \leq \langle e_x + e_{x_1, x_2}, x' - y(x) \rangle + \alpha_{x_1, x_2} \leq c_1 \varphi(x', H) \quad /91/$$

Bizonyítás: Osszuk el a /91/ egyenlőtlenséget $\varphi(x', H)$ -val és a hányadosra adjunk alsó és felső becsléseket:

$$\frac{\langle e_x, x' - y(x) \rangle}{\varphi(x', H)} + \frac{\langle e_{x_1, x_2}, x' - y(x) \rangle}{\varphi(x', H)} + \frac{\alpha_{x_1, x_2}}{\varphi(x', H)} = c(x') \quad /92/$$

1. Felülről becsülünk:

Az első tagot a /87/ alapján, a másodikat a 3.1 definíció alapján, a harmadikat pedig a 3.3 lemma alapján becsüljük meg:

$$c(x') \leq 1 + \varepsilon \cdot \varphi(x', H) + c \cdot \varphi(x, H) (1 + \varepsilon \cdot \varphi(x', H)) + (\varepsilon(4+c) + c) \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \varphi(x', H) \\ \leq 1 + 2\varepsilon + c + c\varepsilon + (4\varepsilon + \varepsilon c + c)(1+\varepsilon)(1-\varepsilon) = c_1 \quad /93/$$

ahol az utolsó tag becslésénél tekintetbe vettük a 3.2 lemmában kikötött norma arányt.

2. Alulról becsülünk:

Alsó becslésnél ugyanazokra a becslésekre hivatkozunk csupán negatív előjellel alkalmazzuk őket, ahol ez szükséges és a /93/-ból nem nagyjuk el a második részből kiemelhető $\varphi(x, H)$ -t:

$$c(x') \geq 1 - \varepsilon \cdot \varphi(x', H) - c \cdot \varphi(x, H) (1 + \varepsilon \cdot \varphi(x', H)) - (4\varepsilon + \varepsilon \cdot c + c) \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \varphi(x, H) \\ \geq 1 - \varphi(x, H) [(5\varepsilon + \varepsilon c + c) \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} + c + \varepsilon] \geq 1 - \varphi(x, H) (6\varepsilon + \varepsilon c + 2c) \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

Látható, hogy ha $\vartheta(x, H) < \gamma$, ahol $\gamma < \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} (6\varepsilon + \varepsilon c + 2c)^{-1}$, akkor van $c(x') > c_2 > 0$.

Ezzel a lemmát beláttuk.

Ezzel befejeztük az előkészületeket, most rátérünk az alaptételek közvetlen előkészítésére.

Tételezzük fel, hogy a $H \subset G \subset E$ zárt halmaz körül megadható egy $\Omega \subset G \cap E \times t(H)$ nyílt halmaz úgy, hogy $\partial H \subset \partial \Omega$. Tételezzük fel továbbá, hogy a ϑ függvény ezen az Ω halmazon minden pontban sima, méghozzá egy univerzális c -vel, Tételezzük fel, hogy minden $x \in \Omega$ ponthoz a 3.1 definíció szerint létező $e_x \in E'$ funkcionállal megadott irányban az $y(x) \in H$ határpontban valamilyen fölénye van a K koalíciónak. Az x pont körüli $G_{\delta(x)}(x)$ környezetben legyen V_x az $y(x)$ -beli fölényt az $y(x)$ pontban realizáló 1.7, 1.8 tételek és 1.1, 1.3 megjegyzések valamelyike által biztosított V leképezés. /Vagyis a határponton határozzuk meg, hogy hogyan választjuk meg az x pont egy környezetében a stratégiánkat./ Ilyenformán nyertünk egy $\{V_x, G_{\delta(x)}(x)\}_{x \in \Omega}$ lokális stratégiacsaládot. Legyen h a $\{G_{\delta(x)}(x)\}_{x \in \Omega}$ fedőrendszerhez 2.7 definícióval megadott függvény. Legyen $1 > \lambda > 0$ valós szám. Képezzük a $\{V_x, G_{\lambda \delta(x)}(x)\}_{x \in \Omega}$ lokális stratégiacsaládot, amelyhez a 2.7 definícióval hozzárendelt függvény $\lambda \cdot h$ lesz. E lokális stratégiacsalád 2.7 következmény szerinti összekapcsolását jelöljük $V^{\lambda, \mu}$ -val, ezen összekapcsolás alapjául a 2.5 tétel konstrukcióját alkalmazzuk, $1 > \mu > 0$ -vel.

Legyen $1 > \nu > 0$ egy valós szám. Legyenek $z, \tilde{z} \in C([t_0, t_1], \Omega)$, amelyekre teljesül, hogy

$$\|z(t) - \tilde{z}(t)\| \leq \nu \cdot h(\tilde{z}(t))$$

/94/

és teljesüljön az alábbi: z abszolút folytonos és

$$z(t_0) = \tilde{z}(t_0)$$

$$\dot{z}(t) = F(\tilde{z}(t), v^{\lambda, \mu}(\tilde{z}(t), u(t)), u(t))$$

illetve

/95/

$$\dot{z}(t) = F(\tilde{z}(t), v(t), v^{\lambda, \mu}(\tilde{z}(t), u(t), u(t)))$$

egyenletek közül a fölénytípusnak megfelelő teljesül, ahol $u(t) \in U_{K'}$, $v(t) \in U_{K \cup K'}^1$, illetve $u(t) \in U_K^1$.

A nevezett jelölések és fogalmak segítségével kimondhatjuk az alábbi két alaptételt:

3.1 Tétel: Tegyük fel, hogy a K koalíciónak elfutó fölénye van minden $x \in \Omega$ mellett az $y(x)$ pontban, az e_x irányban a K' koalícióval szemben. Ekkor bárhogyan választja meg a K' koalíció az u stratégiáját és az $I \setminus (K \cup K')$ a v stratégiáját. /Utóbbi erős fölény esetén üresnek tekintendő/, a /95/ fölénytípusnak megfelelő egyenletének megoldására $v^{\frac{1-\nu}{3}}$, $\frac{1-\nu}{3}$ stratégia mellett teljesül, hogy minden $t > t_0$ mellett $z(t) \in \text{Ext}(H)$ ha csak $z(t_0) \in \text{Ext}(H)$.

Megjegyezzük természetesen, hogy a tétel feltételezi a g H -től mért távolságfüggvényről a 3.1 definíció feltételének teljesülését.

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy a tétel állításával ellentétben van olyan minimális $T > t_0$, hogy $z(T) \in \partial H$. Miután az F feltevésünk szerint eleget tesz a lokális Lipschitz féle feltétel követelményeinek van olyan $G_1(z(T)) \subset G$ környezet, amelyben F L Lipschitz-féle állandóval teljesíti a feltételt.

Megadható továbbá egy $G_2(z(T)) \subset G_1(z(t))$, amelynek sugara a 3.4 lemmában biztosított γ -nál kisebb.

Legyenek most $\tilde{z}(t_0)$, $\tilde{z}(t_1^*)$, ..., $\tilde{z}(t_i^*)$, ... a \tilde{z} görbe $V_{\frac{1-\nu}{3}, \frac{1-\nu}{3}}$ globális stratégiához tartozó döntési pontjai.

Legyenek e pontok megfelelői a z görbén a $z_i = z(t_i^*)$ pontok. Megmutatjuk, hogy ha a $z(t_i^*)$ pontban $\{V_{x_i}, G_{\frac{1-\nu}{3}, \delta(x_i)}(x_i)\}$ stratégiát választottuk a fenti összefüzésnek megfelelően, akkor a z_i, z_{i+1} pontok a $G_{\delta(x_i)}(x_i)$ környezetben vannak.

A fenti konstrukció miatt

$$\|\tilde{z}_i - \tilde{z}_{i+1}\| < (1-\nu)/3 \cdot h(\tilde{z}_i) \quad /96/$$

ahol figyelembe vettük a h függvény jelentését és a stratégiák megadását.

$$A\|\tilde{z}_i - z_i\| < \nu \cdot h(\tilde{z}_i) \quad \text{a /94/ miatt, ezért}$$

$$\|\tilde{z}_i - z_{i+1}\| < (1-\nu)/3 \cdot h(\tilde{z}_i) + \nu \cdot h(\tilde{z}_{i+1})$$

ahol figyelembe véve, hogy a h teljesíti a Lipschitz-féle feltevést:

$$\|\tilde{z}_i - z_{i+1}\| < h(\tilde{z}_i)[\nu + 2(1-\nu)/3] \quad /97/$$

Vegyük figyelembe továbbá, hogy a $\mu = (1-\nu)/3$ választás miatt a 2.5 tétel konstrukciója biztosítja, hogy a \tilde{z}_i körüli $(1-\nu)/3 \cdot h(\tilde{z}_i)[\nu + 2(1-\nu)/3] = \varepsilon$ sugaru környezet benne van a $G_{(1-\nu)/3, \delta(x_i)}(x_i)$ környezetben, ezért

$$G_{3 \cdot \varepsilon / (1-\nu)}(\tilde{z}_i) \subset G_{\delta(x_i)}(x_i) \quad /98/$$

Ez pedig azt jelenti, hogy valóban a z_i, z_{i+1} pontok a szóban forgó környezet pontjai.

Vegyünk minden z_i, z_{i+1} párhoz egy $e_{z_i, z_{i+1}} \in E'$ és $\alpha_{z_i, z_{i+1}}$, a 3.1 definíció értelmében a $G_{\delta(x_i)}(x_i)$ környezet pontjaira létező funkcionált és számot, amelyek segítségével megadunk egy $\mathcal{K}(t)$ függvényt az alábbiak szerint:

$$\mathcal{K}(t) := \langle e_{x_i} + e_{z_i, z_{i+1}}, z(t) - y(x_i) \rangle + \alpha_{z_i, z_{i+1}} \quad /99/$$

ha $t_i^* \leq t \leq t_{i+1}^*$.

A /99/-el bevezetett $\mathcal{K}(t)$ függvény abszolút folytonos és deriváltjára teljesül a /95/-nek megfelelően az alábbiak egyike:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{K}}(t) = & \langle e_{x_i}, F\left(\tilde{z}(t), v^{\frac{1-\nu}{3}}, \frac{1-\nu}{3}(\tilde{z}(t), u(t)), u(t)\right) \rangle + \\ & \langle e_{z_i, z_{i+1}}, F\left(\tilde{z}(t), v^{\frac{1-\nu}{3}}, \frac{1-\nu}{3}(\tilde{z}(t), u(t)), u(t)\right) \rangle /100/ \end{aligned}$$

vagy a másik jobb oldalnál a $F\left(\tilde{z}(t), v^{\frac{1-\nu}{3}}, \frac{1-\nu}{3}(\tilde{z}(t), u(t)), u(t)\right), v(t)$ szerepel hol az $u(t), v(t)$ függvények jelentését lásd a /95/.

Vizsgáljuk meg a kapott függvényt a $G_2(z(T))$ környezetben, azaz egy alkalmas $[t^*, T]$ intervallumon, amikor már a $z(t)$ és a $\tilde{z}(t) \in G_2(z(T))$, $t \in [t^*, T]$ esetén, $t^* < T$.

A $G_2(z(T))$ környezetben teljesülnek a 3.4 lemma feltételei, ezért van olyan c_1 és c_2 , hogy

$$c_2 \mathcal{J}(z(t), H) \leq \mathcal{K}(t) \leq c_1 \mathcal{J}(z(t), H) \quad /101/$$

Vizsgáljuk meg most a $\mathcal{K}(t)$ -t. Ennek második tagjára a következő igaz:

Az F az egész $G_2(z(T))$ -ben eleget tesz a Lipschitz féle feltételnek, ezért megadható egy M korlát, amellyel

$$\|F\| \leq M$$

/102a/

bármely stratégiaválasztás mellett a $G_2(z(T))$ -ben. Ezért a második tagra a /100/ kifejezés jobboldalán érvényes az

$$|\langle e_{z_i, z_{i+1}}, F(z, \dots) \rangle| \leq M c \cdot \varphi(x_i, H) \leq c M \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \varphi(\tilde{z}(t), H) \quad /102/$$

Most az első tag becslése következik:

Becsüljük meg az alábbi eltérést:

$$\begin{aligned} & |\langle e_{x_i}, F(\tilde{z}(t), v_{y(x_i)}(\dots), \dots) \rangle - \langle e_{x_i}, F(y(x_i), v_{y(x_i)}(\dots), \dots) \rangle| \leq \\ & \leq L \cdot \|\tilde{z}(t) - y(x_i)\| \leq L \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} [\varphi(\tilde{z}(t), H) + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \varphi(\tilde{z}(t), H)] = \\ & = C \cdot \varphi(\tilde{z}(t), H) \quad /103a/ \end{aligned}$$

Tekintetbe véve, hogy a levont tag értéke a tétel feltétele miatt nem negatív, hiszen V elfutó fölényt realizál az $y(x_i)$ pontban az e_{x_i} irányban, azt kapjuk, hogy

$$\langle e_{x_i}, F(\tilde{z}(t), v_{y(x_i)}(\dots), \dots) \rangle \geq -C \varphi(\tilde{z}(t), H). \quad /103/$$

alapján.

A /102/ és a /103/ becsléseket egybeírva

$$\dot{\mathcal{K}}(t) \geq -\left(C + cM \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) \varphi(\tilde{z}(t), H) \geq -D \varphi(\tilde{z}(t), H) \quad /104/$$

Most pedig megbecsüljük a $|\varphi(z(t), H) - \varphi(\tilde{z}(t), H)|$ különbség abszolút értéket. Miután a távolság függvény eleget tesz L Lipschitz-féle állandóval a Lipschitz-féle feltételnek, így

$$|\varphi(z(t), H) - \varphi(\tilde{z}(t), H)| \leq \|z(t) - \tilde{z}(t)\| \quad /105/$$

másrészt vegyük figyelembe, hogy minden $x \in \Omega$ pontot legfeljebb $\varepsilon \cdot \varphi(x, H)$ sugaru fedőkörnyezettel fedtünk le, ezért $h(x) \leq \varepsilon \cdot \varphi(x, H)$. /E feltételt ld. a 3.2 lemma feltételei között, amelynek teljesülnie kellett a fedőrendszerünkre./

Ezért a /94/ feltétel felhasználásával

$$|\varphi(z(t), H) - \varphi(\tilde{z}(t), H)| \leq \nu \cdot \varepsilon \cdot \varphi(\tilde{z}(t), H) \quad /106/$$

amelyből könnyen beláthatjuk, hogy

$$(1 - \nu\varepsilon)\varphi(\tilde{z}(t), H) \leq \varphi(z(t), H) \leq (1 + \nu\varepsilon)\varphi(\tilde{z}(t), H) \quad /107/$$

A /101/, az /104/ és az /107/ becslések felhasználásával végül is azt kapjuk, hogy

$$\dot{h}(t) \geq -D \cdot h(t) \quad /108/$$

egy $[t^*, T]$ intervallumon és $h(t^*) > 0$, a /101/ miatt, T definíciójának figyelembevételével.

Képezzünk most egy $A \subset \mathbb{R}^2$ halmazt és ezen értelmezzünk két függvényt:

$$\begin{aligned} A &:= \{(x, s) \mid x = h(s), t \leq s \leq T\} \\ f(x, t) &:= \dot{h}(t), (x, t) \in A \\ g(x, t) &:= -D \cdot x, (x, t) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad /109/$$

E függvényekkel felírhatunk egy-egy differenciálegyenletet:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), t) \\ \dot{y}(t) &= g(y(t), t) \end{aligned} \quad /110/$$

$x(t^*) = y(t^*) = \mathcal{H}(t^*)$ kezdetiértékproblémával.

A /108/ miatt ezek a differenciálegyenletek teljesítik a függetlenség F2.1 tételének feltételeit és mindkét egyenletre vonatkozó kezdetiértékproblémának van /az elsőnek legalább egy, a másodiknak egyértelmű/ megoldása, amelyekre teljesül az idézett tétel állítása, azaz

$$x(t) = \mathcal{H}(t) \geq y(t) = \mathcal{H}(t^*) \cdot e^{-\tilde{D} \cdot (t-t^*)} \quad /111/$$

amelyből a /101/ felhasználásával T-re azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{G}(z(T), H) \geq \frac{c_2}{c_1} \mathcal{G}(z(t), H) \cdot e^{-\tilde{D}(T-t^*)} \quad /112/$$

amelyből következik, hogy $z(T) \notin H$, azaz a tételt beláttuk.

3.2 Tétel: Tételezzük fel, hogy a \mathcal{G} , H-ról mért távolságfüggvény az $\Omega \subset \text{Ext}(H) \cap G$ halmazon sima. Tegyük fel, hogy megadható egy olyan $p \in \partial H$ pont, melynek van olyan $G_0(p) \subset G$ környezete, hogy ennek minden x pontjába a K koalíciónak az $y(x) \in \partial H$ pontban a $-e_x$ irányban egy legalább $c(p) / c(p)$ az 1.1, 1.3 definíciókban szereplő c/mértékű fölénye van a K' koalícióval szemben, /illetve erős fölénye van/. Ekkor van a p pontnak olyan környezete, hogy ha a K koalíció a $V^{\frac{1-\nu}{3}}, \frac{1-\nu}{3}$ globális stratégiát alkalmazza, úgy a K' illetve $I \setminus K \cup K'$ koalíciók bármely stratégiaválasztása mellett a /95/ megoldása véges idő alatt eléri e környezetet bármely pontjából indulva H-t.

Bizonyítás: Megadható a p pont körül tételünk feltételei miatt a 3.1 tétel bizonyításában meghatározott $G_2(p)$, amelyet ott a $z(T)$ határpontra adtunk meg és az általánosság csorbitása

nélkül feltételezhetjük, hogy $G_0(p) \supset G_2(p)$, ha ugyanis nem teljesülne, akkor vegyük e két környezet metszetét.

A /95/ egyenlet minden Ω -ban haladó megoldásához hozzárendelhetjük a /99/-el definiált $\mathcal{K}(t)$ függvényt, melynek deriváltjára teljesül a /100/ előállítás.

Ha e megoldásnak van $G_2(p)$ -ben haladó szakasza, azon a szakaszon érvényesek a /101/, /102a/, /102/, és az /103a/ becslések. Ugyancsak érvényes lesz a /106/ becslés.

A /103a/ becslés alapján adjunk felső becslést a /100/ derivált első tagjára:

$$\langle e_{x_i}, F(\tilde{z}(t), V_{y(x_i)}(\dots), \dots) \rangle \leq -c(p) + c\mathcal{G}(\tilde{z}(t), H) \quad /113/$$

ahol felhasználtuk a fölény mértékére vonatkozó feltevést.

A /102/ és a /113/ becslések felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{K}(t) \leq -c(p) + D \cdot \mathcal{G}(\tilde{z}(t), H) \quad /114/$$

vagy a /106/ felhasználásával

$$\mathcal{K}(t) \leq -c(p) + D_1 \mathcal{G}(z(t), H) \quad /115/$$

Legyen $G_{\delta_1}(p) \subset G_2(p)$ az a környezet, melynél $\delta_1 < c(p)/2D_1$. Ezen egész környezetben az itt haladó $z(t)$ -hez tartozó $\mathcal{K}(t) < -c(p)/2$.

Vegyük most azt a $G_{\delta_2}(p)$ környezetét a p pontnak, amelyre teljesül a

$$\frac{\delta_1 - \delta_2}{M} > \frac{c_1 \delta_2}{c(p)/2} \quad /116/$$

amely figyelembe véve a $c(p) \leq M$ feltételt /mely igen könnyen belátható a definíciók alapján/, mindig egy $\delta_2 < \delta_1$ sugarat eredményez $/c_1$ a /101/-ben szereplő l -nél nagyobb állandó/.

Beláthatjuk, hogy ha $z(t) \in G_{\delta_2}(p)$, akkor van olyan véges T érték, hogy valamely $t^* \in [t, T]$ értékre $z(t^*) \in H$.

Ha $z(t) \in G_{\delta_2}(p)$, akkor $\varphi(z(t), H) < \delta_2$ és ezért

$$\mathcal{H}(t) \leq c_1 \cdot \delta_2 \quad /117/$$

a /101/ felhasználásával. A \approx görbe $G_{\delta_1}(p)$ környezetben haladó $[t, \tilde{t}]$ szakaszán a megfelelő \mathcal{H} függvényre δ_1 definíciója miatt érvényes a

$$\mathcal{H}(s) \leq \mathcal{H}(t) - \frac{c(p)}{2} (s-t) \quad /118/$$

becslés.

Ha mármost $z(t) \in G_{\delta_2}(p)$, akkor legalább

$$T-t: = \frac{\delta_1 - \delta_2}{M} \quad /119/$$

ideig a $G_{\delta_1}(p)$ -ben halad a $z(t)$ görbe, ahol felhasználtuk a /102a/ becslést.

Azonban ekkor a /118/ és a /116/, /117/ felhasználásával

$$\mathcal{H}(T) \leq \mathcal{H}(t) - \frac{c(p)}{2} \cdot \frac{\delta_1 - \delta_2}{M} \leq c_1 \cdot \delta_2 - \frac{c(p)}{2M} (\delta_1 - \delta_2) \leq 0 \quad /120/$$

ami csak úgy lehetséges a /101/ figyelembevételével, hogy valamely $t < t^* \leq T$ mellett $\varphi(z(t^*), M) = 0$. Ezzel pedig beláttuk a tételt, a kívánt környezet a $G_{\delta_2}(p)$ lesz.

2. Elfutás-elfogás késleltetéssel és anélkül.

a. Elfogás és elfutás késleltetés nélkül.

3.3 Tétel: Elfutási tétel:

Legyen $\Theta_K = \bigcup_{i \in K} \Theta_i$. Legyen továbbá $\Omega \subset \text{Ext}(\Theta_K) \cap G$ egy olyan nyílt halmaz, amelyre teljesül a $\partial\Omega \supset \partial\Theta_K$, és amelyre teljesül az alábbi: Legyen a ϑ Θ_K -tól mért távolságfüggvénynek minden $x \in \Omega$ pont simasági pontja univerzális $C > 0$ -val /ld. 3.1 definíciót/, és legyen az előző pontban leírt hozzárendeléssel a K koalíciónak minden $y(x) \in \partial\Theta_K$ pontban az e_x irányban elfutó fölénye. Ekkor a K koalíció a $z(t)$ és $u(t) \in U_K$, ismeretében a $\forall \frac{1}{3}, \frac{1}{3} (z(t), u(t))$ előző pontban definiált globális stratégiaválasztás alapján meg tudja úgy választani stratégiáját, hogy $z(t) \in \text{Ext}(\Theta_K)$, minden $t \in [t_0, t_1]$ mellett a /95/ megfelelő egyenletének megoldására $z = \tilde{z}$ mellett, ha $z(t) \in \text{Ext}(\Theta_K)$.

Bizonyítás: A $z = \tilde{z}$ $\gamma = 0$ mellett teljesíti a z, \tilde{z} -ra kirótt feltételeket, egyébként pedig teljesülnek a 3.1 tétel feltételei. Megjegyezzük még, hogy $z = \tilde{z}$ mellett az itt javasolt globális stratégia helyett a lokális stratégiák összefűzésére bármelyik 2.§-beli összefűzési módszert alkalmazhattuk volna a tétel állítása ugyanugy igaz marad /természetesen olyan összefűzési módszert, amelyet a lokális stratégiák lehetővé tesznek/.

3.4 Tétel: Elfogási tétel:

Legyen $\Theta_K = \bigcup_{i \in K} \Theta_i$. Legyen továbbá $\Omega \subset \text{Ext}(\Theta_K) \cap G$ egy olyan nyílt halmaz, amelyre teljesül a $\partial\Omega \supset \partial\Theta_K$ és amely teljesíti az alábbi feltételt: Legyen ϑ Θ_K -tól

mért távolságfüggvénynek minden $x \in \Omega$ simasági pontja univerzális $c > 0$ -val /ld. a 3.1 definíciót/. Legyen $p \in \partial \Theta_K$ olyan pont, amelynek van olyan $G(p) \subset G$ környezete, $G(p) \cap \text{Ext} \Theta_K \subset \Omega$, hogy minden $x \in G(p) \cap \text{Ext}(\Theta_K)$ esetén a K koalíciónak legalább $c(p)$ mértékű fölénye van az előző pontbeli hozzárendeléssel meghatározott $y(x) \in \partial \Theta_K$ pontban a $-e_x$ irányban a K' koalícióval szemben. Ekkor van a p pontnak olyan $G_{\delta_2}(p)$ sugaru környezete, amelyből kiinduló játékot a $z(t), u(t) \in U_K$, ismeretében választott $V^{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}}(z(t), u(t))$ stratégia segítségével véges idő alatt be tudja fejezni, azaz a /95/ megfelelő kezdeti értékproblémájához megadható olyan T , hogy van olyan $t^* \in [t_0, T]$ melyre a /95/ megoldása teljesíti a $z(t^*) \in \Theta_K$ feltételt $z(t_0) \in G_{\delta_2}(p)$ -re.

Bizonyítás: Pontosan úgy a 3.2 tétel következménye, mint a 3.3 tétel következett a 3.1 tételből. Itt is érvényes természetesen az ottani egyszerűsítő megjegyzés.

3.2 Megjegyzés: A fenti két elfutási tételben láttuk, hogy a K koalíció t -beli stratégiaválasztásához felhasználta a K' koalíció t -beli döntését.

b. Elfogás és elfutás késleltetéssel.

Először a késleltetés mértékére adunk feltételt.

Az F függvény feltevéseink szerint a G halmazon eleget tesz a lokális Lipschitz-féle feltételnek. Fedjük le G -t olyan $\{G_{\delta_0}(x) \mid x \in G\}$ környezetekkel, amelyek mindegyikéhez tartozik egy $L(x)$, $x \in G$, az adott környezetben érvényes Lipschitz-féle állandó. Minden ilyen környezetben megadhatunk olyan $M(x) > 0$ számot, hogy az egész környezetben

$$\|F(y, \dots)\| \leq M(x), \quad y \in G_{\delta_0(x)}^{(x)}. \quad /121/$$

Vegyük azt a fedőrendszert, melyet azok a $\{G_x\}_{x \in G}$ halmazok adnak, amelyekre a /121/ érvényes. Legyen e fedőrendszerhez a 2.7 definícióval hozzárendelt függvény h_1 .

3.1 Feltétel: Legyen h_0 egy folytonos pozitív függvény a G halmazon. Egy $\tau(x) > 0$ késleltetést $x \in G$ mellett megengedett késleltetésnek nevezünk a h_0 feltétel mellett, ha teljesül a

$$\tau(x) \leq \min \left\{ \frac{h_1(x)}{M(x)+4}, h_0(x) \right\} / M(x) \quad /122/$$

feltétel és τ mint x függvénye folytonos.

3.5 Lemma: Legyen $\tau(x)$ egy megengedett késleltetés. Legyen egy $z \in C([t_0, t_1], G)$ abszolút folytonos görbe és legyen N
 $u(t) \in \prod_{i=1}^N K_i$ egy tetszőleges mérhető irányítás. Teljesítse z az alábbi késleltetett differenciálegyenletet:

$$\dot{z}(t) = F(z(t - \tau(z(t))), u(t)) \quad \text{m.m.} \quad /123/$$

Ekkor $z(s) := z(t_0)$, $s \leq t_0$ teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\|z(t) - z(t - \tau(z(t)))\| \leq h_0(z(t)) \quad /124/$$

Bizonyítás:

1. Tegyük fel, hogy az F függvény korlátos és M a korlátja. Ekkor könnyen megbecsülhetjük a /124/ különbséget:

$$\|z(t) - z(t - \tau(z(t)))\| \leq M \tau(z(t)) \quad /125/$$

ahol $M \geq \|F\|$.

Integráljuk most a $[t - \tau(z(t)), t]$ intervallumon a /123/ kifejezést:

$$\int_{t-\tau(z(t))}^t F(z(s - \tau(z(s))), u(s)) ds \quad /126/$$

Becsüljük meg az integrandusban szereplő késleltetett pályapontok távolságát a t -beli késleltetett pályaponttól:

$$\|z(t - \tau(z(t))) - z(s - \tau(z(s)))\| \leq M[t - s + \tau(z(t)) - \tau(z(s))] \quad /127/$$

A $\tau(z(t)) \geq t - s$. Együk fel továbbá, hogy $\tau(z) \leq \varphi(z)$, ahol az egész G -n értelmezett l -el Lipschitz-féle feltételnek eleget tevő függvény:

$$\|z(t - \tau(z(t))) - z(s - \tau(z(s)))\| \leq M(3\varphi(z(t)) + M\varphi(z(t))) \quad /128/$$

2. Ha mármost a lemma feltételeinek jelölései mellett

$$\varphi(x) = \frac{h_1(x)}{M(M+4)}, \quad M=M(x), \quad /129/$$

akkor azt kapjuk, hogy a /128/ becslés biztosítja azt, hogy a /125/ különbséget előállító /126/ integrál integrandusában levő késleltetett argumentum végig a $z(t)$ körüli $h_1(z(t))$ sugarú körben marad és ezért az integrandusra érvényes $M(z(t))$ - vel a /121/ becslés és így

$$\|z(t) - z(t - \tau(z(t)))\| \leq M(z(t))\tau(z(t)) \leq h_0(z(t)) \quad /130/$$

3.6 Lemma: Legyen h l Lipschitz-féle állandóval Lipschitz féle feltételnek eleget tevő pozitív függvény és legyenek

$z_1, z_2 \in E$ olyan pontok, melyekre

$$\|z_1 - z_2\| < \lambda \cdot h(z_1) \quad 0 < \lambda < 1 \quad /131/$$

Ekkor teljesül a

$$\|z_1 - z_2\| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} h(z_2) \quad /132/$$

Bizonyítás:

Képezzük a $h(z_1) - h(z_2)$ különbséget, erre igaz a

$$h(z_1) - h(z_2) \leq \|z_1 - z_2\| \leq \lambda \cdot h(z_1) \quad /133/$$

becslés, ahonnan az állítás már következik.

Következmény: $\lambda < 1/2$ mellett 1-nél kisebb a $\lambda/(1-\lambda)$ állandó értéke.

Ezzel elérkeztünk a késleltetett elfutási illetve elfogási tételek kimondásához és bizonyításához.

3.5 Tétel: Késleltetett elfutási tétel:

Legyen $\Theta_K := \bigcup_{i \in K} \Theta_i$. Legyen $\Omega \subset \text{Ext}(\Theta_K) \cap G$ egy olyan nyílt halmaz, amely teljesíti a $\partial\Omega \supset \partial\Theta_K$ feltételt, és amelyik teljesíti az alábbiakat: Legyen a Θ_K halmaztól mért távolságfüggvénynek minden $x \in \Omega$ simasági pontja és legyen az előző pontban leírt hozzárendeléssel a K koalíciónak minden $y(x) \in \partial\Theta_K$ -ben erős elfutó fölénye az e_x irányban. Legyen továbbá e fölényt realizáló lokális stratégiák családjához a 2.7 definícióval hozzárendelt függvény h , mely Ω -n van értelmezve és legyen $0 < \lambda < 1/2$ mellett $\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ egy olyan megengedett késleltetés, amely teljesíti $h_0 = \lambda h$ -val a 3.1 feltételt. Ha $\tilde{z}(t) := z(t - \tau(z(t)))$, $z(s) := z(t_0)$, $s \leq t_0$, ahol $z, \tilde{z} \in C([t_0, t_1], \Omega)$ és ráadásul z abszolút folytonos és e pár teljesíti a /95/ megfelelő kezdetiértékproblémáját, a $V^{\frac{1-\lambda}{3}, \frac{1-\lambda}{3}}$ globális stratégia mellett, ahol

$\nu = \lambda / (1 - \lambda) < 1$, akkor $z(t_0) \in \text{Ext}(\Theta_K)$ esetén $z(t) \in \text{Ext}(\Theta_K)$ minden $t \in [t_0, t_1]$ véges értékre. Ehhez K stratégiáját a $\tilde{z}(t) = z(t - \tau(z(t)))$ alapján választja meg $\forall \frac{1-\nu}{3}, \frac{1-\nu}{3}(\tilde{z}(t))$ formában.

Bizonyítás: Ha a 3.5 és 3.6 lemmákat alkalmazzuk, akkor megkapjuk, hogy teljesül a z, \tilde{z} -ra a tételben írott ν -vel a /94/ feltétel. Ezek együtt biztosítják a 3.1 tétel feltételeit, ami az írott globális stratégiával biztosítja az elfutást. A stratégiaválasztás ez esetben azért történik a \tilde{z} alapján csupán, mert tudjuk, hogy erős fölény esetén nem kell tekintettel lennünk az ellenfél választására. Végül még annyit jegyzünk meg, hogy késleltetett esetben csak a 2.5 tétel alapján összefűzött stratégiával lehet boldogulni, ahogy ezt a 3.1 és 3.2 tételek bizonyítása lényegesen fel is használja.

3.6 Tétel: Késleltetett elfogási tétel:

Legyen $\Theta_K = \bigcup_i \Theta_K^i$ i. Legyen továbbá $\Omega \subset \text{Ext} \Theta_K \cap G$ olyan nyílt halmaz, amelyre teljesül a $\partial \Omega \supset \partial \Theta_K$, és amely teljesíti az alábbi feltételt: Legyen a Θ_K halmaztól mért távolságfüggvénynek minden $x \in \Omega$ pont simasági pontja univerzális $C > 0$ -val. Legyen $p \in \partial \Theta_K$ olyan pont, amelynek van olyan $G(p) \subset G$ környezete, $G(p) \cap \text{Ext}(\Theta_K) \subset \Omega$, hogy minden $x \in G(p) \cap \text{Ext}(\Theta_K)$ esetén a K koalíciónak legalább $c(p)$ mértékű erős fölénye van az előző pontbeli hozzárendeléssel meghatározott $y(x) \in \partial \Theta_K$ pontban a $-e_x$ irányban. Legyen továbbá e fölényeket realizáló előző pontban megadott lokális stratégiák családjához a 2.7 definícióval hozzárendelt függvény h , amely legalább $G(p)$ -n van értelmezve és legyen $0 < \lambda < 1/2$ mellett $\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$

egy olyan megengedett késleltetés, amely teljesíti $G(p)$ -n a $h_0 = \lambda \cdot h$ függvényvel a 3.1 feltételt. Ha a $\tilde{z}(t) := z(t - \tau(z(t)))$, $z(s) := z(t_0)$, $s \leq t_0$, $z, \tilde{z} \in C([t_0, t_1])$, Ω , és ráadásul z abszolút folytonos és e párra teljesül a /95/ megfelelő kezdetiértékproblémája, a $V \frac{1-\nu}{3}, \frac{1-\nu}{2}$ globális stratégia mellett, ahol $\nu = \lambda/(1-\lambda)$, akkor megadható p -nek olyan $G_{\delta_2}(p)$ környezete, hogy ha $z(t_0) \in G_{\delta_2}(p)$, akkor van olyan T , hogy $t^* \in [t_0, T]$, $t^* > t_0$ -ra $z(t^*) \in \theta_K$. Ehhez a H koalíció stratégiáját a $\tilde{z}(t) = z(t - \tau(z(t)))$ késleltetett információ alapján választja meg.

Bizonyítás: Teljes egészében megegyezik a 3.5 tétellel, azzal a különbséggel, hogy a bizonyításhoz a 3.2 tételt használjuk fel. A 2.5 tétel eljárásánál gyengébb összefüzés itt sem alkalmazható.

3. Elfogás és elfutás Hilbert térben konvex célhalmazoktól.

Legyen a továbbiakban az E terünk egy Hilbert tér. Ismeretes, hogy Hilbert téren pontnak és konvex zárt halmaznak a távolsága felvételik, azaz ha H az E egy konvex részhalmaza, akkor $x \in E$ -hez hozzárendelhetjük a H -ra való $y(x)$ vetületét /megtartjuk e jelölést itt is, hogy egyszerűbben hivatkozhasunk majd az előző pont tételeire/, amelyre $\varrho(x, H) = \|x - y(x)\|$ és mint ismeretes, teljesül az $\|y(x_1) - y(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$ Lipschitz féle feltétel. Belátunk most egy lemmát, amelyből következik, hogy a ϱ távolságfüggvénynek egyrészt minden $\text{Ext}(H)$ -beli pontja simasági pontja, másrészt a távolságfüggvény e halmazon folytonosan differenciálható.

3.7 Lemma: Legyen $H \subset E$ konvex zárt halmaz. Ekkor $x \in \text{Ext}(H)$ esetén a $g(x, H)$ differenciálható és deriváltja éppen $(x - y(x)) / \|x - y(x)\| =: e_x$. Érvényes egyuttal a

$$|g(x', H) - \langle e_x, x' - y(x) \rangle| \leq \frac{1}{2} \|x - x'\|^2 / g(x, H) \quad /134/$$

Igaz továbbá, hogy e függvény deriváltja folytonos is az $\text{Ext}(H)$ -ban és minden pont egy alkalmas környezetében a derivált eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek.

Bizonyítás: Legyen x egy tetszőleges $\text{Ext}(H)$ -beli pont, legyen ennek távolsága H -tól $g(x, H) = c$. Az ilyen távolságu pontok halmaza konvex, halmaz határa és e konvex halmazhoz fektethető x -en keresztül egy támasz hipersík. Más oldalról e pontok halmaza kívül lesz az $y(x)$ pont körüli c sugaru gömbön. De Hilbert téren gömbnek minden határpontjában csupán egyetlen érintő hipersíkja lehet, ezért az x -en keresztül fektethető hipersík egyuttal az $y(x)$ körüli c sugaru gömbnek is érintője és e két felület között lesz a $g(x, H) = c$ felület. A /134/ becslést geometriai meggondolás alapján könnyen megkapjuk.

1. Következmény: $\varepsilon > 0$ -val a 3.1 definíciónak eleget tevő pontokból álló környezet sugara $x \in \text{Ext}(H)$ esetén $\delta(x) = \varepsilon^{3/2} \cdot g^{3/2}(x, H) \leq \varepsilon \cdot g(x, H)$, ahhoz, hogy $\|e_{x_1, x_2}\| \leq \varepsilon g(x, H)$ legyen.

2. Következmény: A deriváltra vonatkozó formulával kapcsolatban rögtön láthatjuk, hogy a bizonyítás jelöléseivel $\{g > c/2\}$ halmazon a derivált eleget tesz Lipschitz-féle feltételnek, $L = 4/c$ Lipschitz-féle állandóval.

E megjegyzések után a 3.3, 3.4, 3.5 és 3.6 tételeket az

alábbi formában mondhatjuk ki:

3.1 Feltetés: Álljon elő a H halmaz véges sok egymástól diszjunkt konvex nyílt halmazokkal elválasztható konvex zárt halmazból. Legyen \mathcal{U} ezen elválasztó nyílt halmazok egyesítése és $x \in \mathcal{U}$ esetén legyen $e_x := (x - y(x)) / \|x - y(x)\|$, ahol az $y(x)$ arra a H -t alkotó konvex zárt halmazra való vetület, amelyet \mathcal{U} -nak x -et tartalmazó komponense tartalmaz.

3.3a Tétel: Teljesítse a 3.3 tétel \mathcal{O}_K , célhalmaza a 3.1 feltetésben foglaltakat. Ekkor ha a 3.1 feltetésben szereplő x , $y(x)$ és e_x -el $\forall x \in \mathcal{U}$ mellett teljesül a 3.3 tétel fölényre vonatkozó feltétele, akkor a 3.3 tétel állítása igaz.

3.4a Tétel: Teljesítse a 3.4 tétel \mathcal{O}_K célhalmaza a 3.1 feltetésben foglaltakat. Ekkor ha a 3.1 feltetésben szereplő $x, y(x)$ és e_x -el $\forall x \in \mathcal{U}$ mellett teljesül a 3.4 tétel fölényre vonatkozó feltétele, akkor a 3.4 tétel állítása igaz.

3.5a Tétel: Teljesítse a 3.5 tétel \mathcal{O}_K , célhalmaza a 3.1 feltetésben foglaltakat. Ekkor ha a 3.1 feltetésben szereplő $x, y(x)$ és e_x -el $\forall x \in \mathcal{U}$ mellett teljesül a 3.5 tétel fölényre vonatkozó feltétele, akkor a 3.5 tétel állítása igaz.

3.6a Tétel: Teljesítse a 3.6 tétel \mathcal{O}_K célhalmaza a 3.1 feltetésben foglaltakat. Ekkor ha a 3.1 feltetésben szereplő $x, y(x)$ és e_x -el $\forall x \in \mathcal{U}$ mellett teljesülnek a 3.6 tétel fölényre vonatkozó feltevései, akkor a 3.6 tétel állítása igaz.

Bizonyítás: Mindnégy tételben azt kell bebizonyítani, hogy az \mathcal{U} pontjaiban a \mathcal{U} -nak minden pontja simasági pontja. Ez pedig úgy teljesül, hogy a célhalmaz egyes komponenseit tartalmazó nyílt komponenseken igaz, méghozzá a 3.7 lemma 1.

következménye miatt.

Megjegyezzük, hogy e tételek olyan értelemben maximálisak, hogy ezekben az elfutáshoz, illetve elfogáshoz csak a célhalmaz határpontjaira teszünk kikötést és az is csupán a fölényre vonatkozik. E kikötések gyengítésével lehet csupán erősebb tételeket bizonyítani, de az alábbi két tétel mutatja, hogy az elfutásra vonatkozó feltevések nem gyengíthetők általában.

2. Feltevés: Legyenek az 1. feltevésben szereplő H halmaz komponensei H_p , $p=1,2, \dots, r$ és legyen minden ilyen H_p halmaz egy $H_p^0 \subset H_p$ konvex zárt halmaztól legfeljebb $\varepsilon_p > 0$ távolságra lévő pontok halmaza.

3.7 Tétel. Teljesítse a 3.3 tétel Θ_K , célhalmaz az 1. és 2. feltevésekben foglaltakat. Ekkor a 3.3 tétel fölényre vonatkozó feltétele a K koalíció számára az elfutás szükséges és elegendő feltétele, méghozzá úgy, hogy ha a koalíció nem tud a 3.3-ban biztosított nem késleltetett információk alapján elfutni, akkor a $I \setminus K$ számára teljesül a 3.6 tétel feltétele az elfogásra, azaz még megengedett késleltetéssel is eléri Θ_K -t.

Bizonyítás: Ez a tétel egyszerű következménye a 3.7 lemma 2. következményének és a 2. feltevésnek. Ugyanis, először is azt jegyezzük meg, hogy minden $y(x)$ -et helyettesíthetünk a ∂H_p -beli pont helyett a neki megfelelő ∂H_p^0 -re való vetülettel. Így kiderül, hogy az Ω -n a 2. következmény miatt az e_x eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek nekünk elegendő ebből annyi, hogy a Θ_K halmaz határán is folytonos.

Ha mármost nem teljesül minden határpontban a 3.3 tétel elfutásra vonatkozó feltétele, akkor van olyan pont, amelyben

valamilyen c_0 -val az 1.3 feltevés igaz e_p -vel egy p határpontban. /Felhasználtuk az 1.1 tételt./ Ámde az e_x folytonossága miatt e pontnak van olyan környezete, amelyben már teljesül a 3.6a tétel feltétele és így beláttuk, hogy a tétel igaz.

3.8 Tétel: Teljesítse a 3.5 tétel Θ_K , célhalmaza az 1. és 2. feltevésekben foglaltakat. Ekkor a 3.5 tétel feltétele késleltetett információ melletti elfutásra szükséges feltétel is abban az értelemben, hogy ha nem teljesül, akkor van olyan határpontja a célhalmaznak, amelynek megadható olyan környezete, hogy ebből nem késleltetett információval a K eléri a célhalmazt, mert teljesül a 3.4a tétel feltétele.

Bizonyítás: E tételt is ugyanugy bizonyíthatjuk, ahogy a 3.7 tétel bizonyítását vázoltuk, csupán a 1.2 tételt kell felhasználnunk.

A 3.7 és 3.8 tételek azt mutatják, hogy a bemutatott módszerek késleltetett és nem késleltetett esetben ϵ pontosságu célzásokra és elfogásra, ami a gyakorlat számára általában kielégítő és numerikusan más ut nem is követhető, elegendőek, mert szükséges és elegendő feltételt adnak elfutásra. A most következő pontban igen röviden egy numerikus módszert adunk.

4. Numerikus módszer.

Numerikus eljárásunk vázlatát a 3.1 illetve a 3.2 alaptételek szintjén foglaljuk össze igen röviden. Ez alatt azt értjük, hogy a tárgyalt négyféle esetet nem nézzük külön.

Legyen megadva a minden, a 3.1, 3.2 tételek előkészítésénél szereplő $x \in \mathcal{D}$ körüli $G_{\mathcal{D}(x)}(x)$ környezet. Legyen

továbbá megadva a /94/-ben szereplő ν , továbbá a \tilde{z} , z pár, ahol \tilde{z} a z -nek /94/-et teljesítő becslése. Ezt minden időpontban adottnak tekintjük. Legyen megadva továbbá a $z(t_0) = z_0 = \tilde{z}(t_0)$ kezdetiértékprobléma. Ismertnek tételezzük fel /mert számítható az egyenlet és a célhalmaz ismeretében/ a h függvényt is. Kérdés, hogy a \tilde{z} becslés ismeretében hogyan használjuk fel a $\{V_x, G_{\delta(x)}(x)\}_{x \in \Omega}$ lokális stratégiákat arra, hogy a z görbe biztosan elkerülje a H halmazt, vagy a másik feladatnak megfelelően biztosan elérje azt.

Eljárásunk a következő:

Legyenek a t_0, t_1, \dots, t_k időpontok azok, amelyekben új lokális stratégiára térünk át. E pontokat a következőképpen határozzuk meg:

Válasszuk a $\tilde{z}(t_i)$ pontban azt a $(V_{\tilde{z}}(t_i), G_{\delta(\tilde{z}(t_i))}(\tilde{z}(t_i)))$ párt, amelyre teljesül a $\delta(\tilde{z}(t_i)) > (1 - \frac{1-\nu}{3})h(\tilde{z}(t_i))$. Ez megválasztható így, a h függvény definíciója miatt.

Legyen a $\tilde{z}(t_{i+1})$ az a legkisebb $t > t_i$, amelyre az ellenfél stratégiaválasztása mellett a $V_{\tilde{z}}(t_i)$ lokális stratégia alkalmazásával először teljesül, hogy $\|\tilde{z}(t_i) - \tilde{z}(t)\| = \frac{1-\nu}{3} h(\tilde{z}(t_i))$. Erre a $t=t_{i+1}$ -re ismét a fentieknek megfelelően választunk új stratégiát. Ezzel az eljárással a 3.1 illetve 3.2 tételek biztosítják a z -re vonatkozó kikötéseket.

Hilbert tér esetében \mathcal{E} -pontosságú elfutásra illetve célzásra 2. feltételnek eleget tevő célhalmazok esetében az elméleti eredmény mellé numerikus eljárást is ad, a fenti módszer vagyis az elfutásra vonatkozó elméleti szükséges és elegendő feltétel kiegészül azzal, hogy egyuttal az adott feltétel mellett konvergens numerikus módszer is adható.

Függelék.Fl. Borel mérhető leképezés megadása adott zárt halmazba eső grafikonnal.

Legyenek E és F szeparábilis lokálisan kompakt metrikus terek. Jelöljük az E tér Borel-halmazait $\mathcal{B}(E)$ -vel, jelölje $p_E : E \times F \rightarrow E$ / $p_F : E \times F \rightarrow F$ / az $E \times F$ -ből az E -be / F -be / való vetítést.

Fl.1 Definíció: Az $u: E \rightarrow F$ leképezést Borel-mérhetőnek nevezzük, ha minden $G \subset F$ nyílt halmazra $u^{-1}(G) \in \mathcal{B}(E)$.

Fl.1 Tétel: Legyen $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n : E \rightarrow F$, $n=1,2,\dots$ mellett Borel-mérhető leképezések pontonként konvergens sorozata. Ekkor az $u(x) := \lim u_n(x)$, $x \in E$ egyenlőséggel pontonként megadott $u: E \rightarrow F$ leképezés is Borel-mérhető.

Legyen most $H \subset E \times F$ zárt halmaz.

Fl.2 Tétel: Ha a $p_E(H) = E$ teljesül, akkor megadható olyan $u: E \rightarrow F$ Borel-mérhető leképezés, amelyre

$$(x, u(x)) \in H, \text{ minden } x \in E \text{ esetén.} \quad /F.1/$$

Bizonyítás: Megadunk egy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ Borel-mérhető leképezéssorozatot, amely pontonként konvergens és limesze teljesíti az /F.1/ feltételt.

1. Az u_1 függvény megadása:

Az E, F terek feltevésünk szerint szeparábilisek, ezért $\varepsilon = 1/2$ -hez megadható olyan $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ H sorozat, hogy teljesül a

$$H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{1/2}(p_n) \quad /F.2/$$

tartalmazás, ahol a $G_{1/2}(p_n)$ a lokális kompaktság miatt

kompakt környezet.

A $p_E(G_{1/2}(p_i) \cap H) \subset E$ halmaz kompakt, mert p_E folytonos, H pedig zárt.

Képezzük a

$$B_i^1 := \overline{p_E[G_{1/2}(p_i) \cap H]} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} p_E[G_{1/2}(p_j) \cap H], \quad i=1,2,\dots \quad /F.3/$$

páronként diszjunkt Borel-halmazok rendszerét amelyre teljesül, hogy

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^1. \quad /F.4/$$

Ezután megadjuk az u_1 leképezést az alábbiak szerint:

$$u_1(x) := p_i, \text{ ha } x \in B_i^1 \quad /F.5/$$

Az u_1 leképezés grafikonjára teljesül a

$$\Gamma(u_1) \subset G_{1/2}(H) \quad /F.6/$$

tartalmazás, ahol $G_{1/2}(H)$ jelenti a H halmaz $1/2$ sugaru környezetét, a Γ pedig az u_1 függvény grafikonját.

2. Az u_2 leképezést $\varepsilon = 1/4$ -hez az alábbiak szerint adjuk meg:

A $G_{1/2}(p_i) \cap H$ halmazok kompaktsága következtében megadható minden $i=1,2,\dots$ mellett olyan $\{p_{ik}\}_{k=1}^{n_i} \subset G_{1/2}(p_i) \cap H$ véges sok pont, hogy $\bigcup_{k=1}^{n_i} H \cap G_{1/4}(p_{ik}) \supset H \cap G_{1/2}(p_i)$ teljesül.

Állítsuk elő ezután a B_i^1 halmazt a következő formában:

$$B_{ik}^2 = p_E \left[G_{1/4} (p_{ik}) \cap H \right] \cap B_i^1 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} p_E \left[G_{1/4} (p_{ij}) \cap H \right] \cap B_i^1 \right),$$

$$k=1, \dots, n_i. \quad /F.7/$$

Minden rögzített i mellett teljesül a

$$B_i^1 = \bigcup_{k=1}^{n_i} B_{ik}^2 \quad /F.8/$$

összefüggés és a B_{ik}^2 rendszer elemei diszjunktak és az /F.8/ miatt egyesítésük lefedi az egész E teret.

Az u_2 leképezést így definiáljuk:

$$u_2(x) := p_{ik}, \text{ ha } x \in B_{ik}^2 \quad /F.9/$$

amelyből azonnal következik, hogy

$$\Gamma(u_2) \subset G_{1/4}(H)$$

$$s(u_1(x), u_2(x)) \leq 1/2 \quad /F.10/$$

feltételek teljesülnek.

3. Tegyük fel, hogy a 2. pont eljárásának n -szeri ismétlésével megadtuk a $B_{i_1, i_2, \dots, i_n}^n$ halmazrendszert úgy, hogy

$$B_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}^{n-1} = \bigcup_{j=1}^{n_{i_1, \dots, i_{n-1}, j}} B_{i_1, \dots, i_{n-1}, j}^n \quad /F.11/$$

ahol

$$B_{i_1}^n, \dots, i_{n-1}, j \in {}^{p_E} [G_{1/2}^n(p_{i_1}, \dots, i_{n-1}, j) \cap H] \cap B_{i_1}^{n-1}, \dots, i_{n-1} \setminus \\ \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} {}^{p_E} [G_{1/2}^n(p_{i_1}, \dots, i_{n-1}, k) \cap H] \cap B_{i_1}^{n-1}, \dots, i_{n-1} \right) \quad /F.12/$$

és a $p_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, j} \in G_{1/2}^{n-1}(p_{i_1}, \dots, i_{n-1}) \cap H$ pontokkal

teljesül a

$$G_{1/2}^{n-1}(p_{i_1}, \dots, i_{n-1}) \cap H \subset \bigcup_{j=1}^{n_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}} G_{1/2}^n(p_{i_1}, \dots, i_{n-1}, j) \quad /F.13/$$

tartalmaz és ezzel megadtuk az

$$u_n(x) = p_{i_1, i_2, \dots, i_n}, \quad x \in B_{i_1}^n, \dots, i_n \quad /F.14/$$

függvényt. Erre teljesül a

$$\Gamma(u_n) \subset G_{1/2}^n(H) \quad /F.15/$$

$$g(u_n(x), u_{n-1}(x)) \leq 1/2^{n-1}, \quad x \in E.$$

két feltétel.

Az u_{n+1} függvényt a 2. pont lejárásának megismétlése útján kapjuk meg.

Ezzel az eljárással megadjuk az $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ Borel-mérhető függvények egy megszámlálható sorozatát.

Legyen $x \in E$ egy rögzített pont, az $u_n x$ alaku pontsorozat Cauchy sorozat az /F.15/ miatt és a kompaktság következtében minden $x \in E$ -re konvergens. Legyen u az alábbi leképezés:

$$u(x) := \lim_n u_n(x), \quad x \in E \text{ mellett.} \quad /F.16/$$

Az $(x, u(x)) \in G_{1/2^n}(H)$, $n=1, 2, \dots$ mellett, ezért

$$(x, u(x)) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{1/2^n}(H) = H \quad /F.17/$$

ami a tétel bizonyítását adja, az F1.1 tétel figyelembevételével.

F2. Differenciálegyenlőtlenségek.

1. Alapbecslés.

F2.1 Tétel: Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ egy halmaz. Legyen továbbá $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ egy mérhető leképezés. Legyen továbbá $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos leképezés. Legyenek továbbá $y, z: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos leképezések, amelyekre teljesülnek az alábbiak:

$$(y(s), s) \in A, \quad s \in [t_0, T], \text{ továbbá}$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds \quad /F.18/$$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t g(z(s), s) ds$$

és

$$1. \quad f(x, s) \geq g(x, s), \quad (x, s) \in A.$$

2. A $g(x, s)$ csökkenő függvény rögzített s mellett az x változóban.

$$\text{Ekkor} \quad y(t_0) = z(t_0) \quad \text{esetén}$$

$$y(t) \geq z(t) \quad /F.19/$$

minden $t \in [t_0, T]$ mellett.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy megadható olyan $t \in [t_0, T]$ hogy $z(t) > y(t)$ áll fenn.

Képezzük a

$$t_0 \leq t^* := \inf \{s \mid z(t') > y(t'), t' \in [s, t]\} \quad /F.20/$$

értéket. Miután mindkét függvény folytonos, $t^* < T$, továbbá $y(t^*) = z(t^*)$. Figyelembevéve még a $z(t_0) = y(t_0)$ feltételt, és az /F.20/ egyenlőtlenségét, megadható olyan $\delta > 0$, hogy $[t^*, t^* + \delta] \subset [t_0, T]$ és $t \in [t^*, t^* + \delta]$ mellett $z(t) > y(t)$.

Az /F.18/ előállításnak és az 1. feltételnek az alapján

$$y(t) = y(t^*) + \int_{t^*}^t f(y(s), s) ds \geq y(t^*) + \int_{t^*}^t g(y(s), s) ds,$$

ahol alkalmazva továbbá a g -re kirótt 2. feltételt, az $y(s) \leq z(s)$,

$s \in [t^*, t^* + \delta]$ figyelembevételével:

$$y(t) + \int_{t^*}^t g(y(s), s) ds \geq y(t^*) + \int_{t^*}^t g(z(s), s) ds = z(t)$$

azaz $y(t) \geq z(t)$ minden $t \in [t^*, t^* + \delta]$ mellett. Ezzel pedig a tételt bebizonyítottuk.

2. Konvex Kupok.

Legyen B egy Banach tér és legyen $G_1(0)$ egy 0 körüli környezet.

Képezzünk egy újabb környezetet ebből az alábbi definícióval:

Legyen $e \in B'$, $\|e\| = 1$ folytonos lineáris funkcionál.

Képezzük az alábbi normát:

$$\|x\|_e := \max \{2|\langle e, x \rangle|, \|x\|\} \quad /F.21/$$

Könnyen beláthatjuk, hogy e norma ekvivalens az eredeti normával. Az is könnyen igazolható, hogy

$$G_1^{\text{III}}(0) = G_1(0) \cap \{|e| \leq 1/2\} \quad /F.22/$$

fennáll.

Legyen továbbá $t \in \{|e|=1/2\} \cap G_1(0) \neq \emptyset$, melyre $\langle 2e, t \rangle = \|t\|_{e=1}$. Jelöljünk egy ilyen $G_1(0)$ -beli belső pontot t -vel. Igaz az alábbi állítás:

F2.2 Tétel: A $\{2e > c > 0\}$ halmaz előáll

$$\{2e > c > 0\} = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \{G_1^{\text{III}}(0) + t\} + c \cdot t \quad /F.23/$$

alakban.

Bizonyítás: Elegendő az állítást $c=0$ mellett belátni, amelyhez tartozó baloldalt $-ct$ -vel való eltolás útján kapjuk meg.

Miután $t \in G_1(0)$ belső pont, van olyan $G_\varepsilon(t)$ környezete, melyre

$$G_\varepsilon(t) \subset G_1(0) \quad /F.24/$$

teljesül. Ebből következik, hogy

$$G_1(0) \cap \{2|e| < 1\} \supset G_\varepsilon(-t) \cap \{2e > -1\} \quad /F.25/$$

ahol felhasználtuk a gömbi környezet kiegyensúlyozottságát.

Az /F.24/ azt jelenti tehát, hogy $G_1^{\text{III}}(0) \supset G_\varepsilon(-t) \cap \{2e > -1\}$ feltétel teljesül. Ennek t -vel való eltolására azt kapjuk, hogy

$$G_1^{\text{III}}(t) \subset \{2e > 0\} \quad /F.26/$$

és

$$G_1^{\text{III}}(t) \supset G_\varepsilon(0) \cap \{2e > 0\} \quad /F.27/$$

tartalmazások teljesülnek.

Ismeretes továbbá, hogy

$$\bigcup_{\lambda > 0} \lambda \{G_\epsilon(0) \cap \{2e > 0\}\} = \{2e > 0\} \quad /F.28/$$

teljesül, a tétel állítását beláttuk.

Legyen most K egy kompakt metrikus tér, legyen $G \subset B$ nyílt halmaz és legyen $f: G \times K \rightarrow B$ folytonos leképezés. Legyen $e \in B'$ egységnormájú folytonos lineáris B -n értelmezett funkcionál. Teljesítse az

$$f(x_0, K) \subset \{e > h > 0\} \quad /F.29/$$

feltételt valamely $x_0 \in B$ -re.

Legyen továbbá $\| \cdot \|_e$ a fent bevezetett norma.

Ezzel érvényes az alábbi tétel:

F2.3 Tétel: Megadhatók olyan $t \in B$, $\|t\|_e = 1$, $0 < \epsilon < 1$, $\langle 2e, t \rangle = 1$ úgy, hogy

$$f(x_0, K) \subset \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \{G_\epsilon^{\| \cdot \|_e}(0) + t\} = K_{\epsilon, t}(0) \quad /F.20/$$

teljesül.

Bizonyítás: Az F2.2 tétel $c=2h$ -val biztosítja, hogy az

$$\{e > h > 0\} = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \{G_1^{\| \cdot \|_e}(0) + t\} + ct \quad /F.31/$$

előállítás érvényes, ahol az unióban szereplő halmazok nyíltak /ld. az /F.23/ összefüggést/. A K halmaz kompakt, ezért folytonos képe is az és így $f(x_0, K) \subset \{e > h > 0\}$ is kompakt lesz, van tehát olyan véges $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ halmaz, hogy

$$f(x_0, K) \subset \bigcup_{i=1}^k \lambda_i \{G_1^{\| \cdot \|_e}(0) + t\} + ct$$

is igaz. A szereplő fedőhalmazok a λ -nak monoton függvényei a tartalmazásra nézve, ezért vegyük a legkisebb λ_{i_0} -t, mely már lefedi az $f(x_0, K)$ -t, ezzel

$$f(x_0, K) \subset \lambda_{i_0} \{G_1^{III} u_e(0) + t\} + ct = G_{\lambda_{i_0}}^{III} u_e(0) + (\lambda_{i_0} + c)t. \quad /F.32/$$

A kapott eredményt felhasználva

$$\begin{aligned} f(x_0, K) &\subset G_{\lambda_{i_0}}^{III} u_e(0) + (\lambda_{i_0} + c)t \subset \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \{G_{\lambda_{i_0}}^{III} u_e(0) + (\lambda_{i_0} + c)t\} = \\ &= \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \left\{ G_{\frac{\lambda_{i_0}}{\lambda_{i_0} + c}}^{III} u_e(0) + t \right\} \end{aligned} \quad /F.32/$$

amellyel a tételt beláttuk.

Legyen most $u: [t_0, t_1] \rightarrow K$ mérhető leképezés, legyen továbbá

$$x: [t_0, t_1] \rightarrow B, \quad /F.33/$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s), u(s)) \, ds$$

abszolút folytonos leképezés.

F2.4 Tétel: Legyen F a fent definiált leképezés, és teljesítse az $x_0 \in B$ -ben az /F.29/-et valamely $e \in B'$, $\|e\| = 1$ funkcionállal. Ekkor a fent definiált $\|\cdot\|_e$ normához megadható olyan $1 > \varepsilon > 0$ és $h \in B$, $\|h\|_e = 1$, és olyan $\delta > 0$, hogy ha $t_0 < t \leq t_0 + \delta$ tetszőlegesen, továbbá $x(t_0) = x_0$, akkor az /F.33/-al megadott x függvényre teljesül, hogy

$$x(t) \in (x_0 + K_{\varepsilon, h}(0)) \quad /F.35/$$

Bizonyítás: Az F2.3 tétel biztosít egy nyílt $K_{\varepsilon, h}(0)$ kupot, amelyre

$$f(x_0, K) \subset K_{\varepsilon, h}(0)$$

/F.36/

teljesül. Képezzük az

$$f^{-1}(K_{\varepsilon, h}(0)) \subset B \times K$$

halmazt, ez f folytonossága folytán nyílt halmaz, amely tartalmazza az $\{x_0\} \times K$ halmazt. K kompaktsága folytán azonban van olyan $\delta_0 > 0$, hogy $G_{\delta_0}(x_0) \times K \subset f^{-1}(K_{\varepsilon, h}(0))$ is teljesül.

Miután $x(t)$ abszolút folytonos, így folytonos is, ezért megadható olyan δ_1 , hogy $\|x(t) - x(t_0)\| < \delta_0$, ha $|t - t_0| < \delta_1$.

Belátjuk, hogy $\delta_1 = \delta$, amelyet a tételben keresünk.

Be kell látnunk, hogy minden $t_0 < t \leq t_0 + \delta$ mellett $x(t) \in K_{\varepsilon, h}(0) + x_0$, vagy ami ugyanaz, $x(t) - x_0 \in K_{\varepsilon, h}(0)$.

Megjegyezzük, hogy a $K_{\varepsilon, h}(0)$ kupban azok és csak azok az r vektorok vannak, amelyekhez van olyan $\lambda > 0$, hogy

$$\| \lambda \cdot h - r \|_e < \varepsilon \cdot \lambda.$$

/F.37/

Ezzel egyenértékű, hogy

$$\| h - \frac{\| r \|_e}{\lambda} \cdot \frac{r}{\| r \|_e} \|_e < \varepsilon.$$

/F.37a/

Könnyen belátható, hogy a λ mindig megválasztható

$\| r \|_e = \lambda$ alakban.

Vizsgáljuk meg tehát az

$$\begin{aligned} \| x(t) - x_0 \|_e &= \left\| \int_{t_0}^t f(x(s), u(s)) \cdot h \, ds \right\|_e = \left\| \int_{t_0}^t [f(x(s), u(s)) - f(x(s), u(s)) \cdot h] \, ds \right\|_e \\ &\leq \int_{t_0}^t \| f(x(s), u(s)) - f(x(s), u(s)) \cdot h \|_e \cdot h \, ds \end{aligned} \quad /F.38/$$

különbség normáját. Felhasználva, hogy $t_0 < t < t_0 + \delta$ mellett /F.36/ teljesül, így igaz, hogy

$$\|x(t) - x_0 - h \cdot \int_{t_0}^t \|f(x(s), u(s))\|_E ds\|_E \leq \int_{t_0}^t \|f(x(s), u(s))\|_E \cdot \epsilon ds \quad /F.39/$$

ahol az /F.38/ végére alkalmaztuk az /F.37a/ jellemzést.

Ezzel azonban az $x(t) - x_0$ különbségről beláttuk, hogy teljesíti az /F.37/ feltételt, tehát a $K_{\epsilon, h}(0)$ kupnak eleme minden $t_0 < t \leq t_0 + \delta$ mellett. Ezzel beláttuk a tételt.

Megjegyezzük még, hogy Banach tereken az /F.23/ előállításhoz speciális norma bevezetése szükséges, mint ezt az alábbi példa mutatja:

Vegyük az R^2 teret mint Banach teret és lássuk el az $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ normával. Ismeretes, hogy ezzel a 0 körüli gömbök olyan négyzetek lesznek, melyek csúcsai a tengelyekre illeszkednek. Vegyük az egységgömböt és toljuk el az x_1 koordináta irányába +1-el és nézzük az $\{x_1 > 0\}$ félteret.

Az $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda \{G_1(0) + (1, 0)\}$ halmaz egy 0 csúcsu 90° -os nyílásszögű kup lesz és nem adja ki az $\{x_1 > 0\}$ félteret.

F3. Parciális maximum /minimum/ függvények folytonossága.

Legyen M egy metrikus tér, K kompakt halmaz. Legyen

$$f: M \times K \longrightarrow R \quad /F.40/$$

egy folytonos függvény. Tegyen eleget f továbbá K -ban egyenletesen minden rögzített $u \in K$ mellett $(x, u) \in M \times K$ / az x változójában Lipschitz-féle feltételnek. Legyen

$$f_m(x) := \min_v f(x, v), \quad /F.41/$$

azaz

$$f_m: M \longrightarrow R$$

leképezés.

F3.1 Tétel: Az f_m függvény folytonos, ha f folytonos és az f_m eleget tesz a lokális Lipschitz-féle feltételnek, ha f az u rögzítése mellett x -ben eleget tesz a lokális Lipschitz-féle feltételnek. Ekkor az f_m függvény valamely x körüli Lipschitz-féle állandója megegyezik az f ugyan e pontbeli Lipschitz-féle állandójával.

Bizonyítás:

a. Legyen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ olyan sorozat, melyre $x_n \rightarrow x \in M$. K kompaktsága folytán megadható olyan $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ sorozat, hogy $f(x_n, v_n) = f_m(x_n)$.

A $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatból kiválasztható egy konvergens v_{n_k} részsorozat, amelyre

$$f(x_{n_k}, v_{n_k}) \rightarrow f(x, v) . \quad /F.42/$$

Az f_m függvény definíciója folytán

$$f(x, v) \leq f(x, v') , \forall v' \in K \text{ mellett} \quad /F.43/$$

és ezért

$$f_m(x) = f(x, v) . \quad /F.44/$$

Ha más konvergens részsorozatot választunk ki az $f(x_n, v_n)$ -ből, ez is szükségképpen az $f_m(x)$ -hez tart és ezért az $f_m(x_n)$ sorozatnak mindössze egyetlen torlódási pontja lehet, vagyis a sorozat konvergens és így az /F.44/ figyelembevételével f_m folytonos.

b. A Lipschitz-féle feltétel bizonyítása:

Legyen $x \in M$ és $v_0 \in K$, melyekre

$$f_m(x) = f(x, v_0) . \quad /F.45/$$

Az f_m definíciója alapján

$$\min f(x', v) \leq f(x', v_0) \leq f(x, v_0) + L(x)d(x', x)$$

Más oldalról

$$f(x, v_0) - L(x)d(x', x) \leq f(x, v) - L(x)d(x', x) \leq f(x', v) \quad /F.46/$$

ahol az elejét és a végét nézve csupán a jobb oldal függ a v -től, ezért a jobb oldal minimumára is teljesül az egyenlőtlenség, ami a tételt bizonyítja.

Irodalomjegyzék

- [1] A. Blaquiere: Topics in Differential Games. 1973.
North-Holland Publ. Company, Amsterdam-London.
- [2] A. Blaquiere, P. Caussin: Further Geometric Aspects of
Differential Games. Megjelent az 1 -ben.
- [3] Friedman, Avner: Upper and Lower Values of Differential
Games. J. Diff. Eq. 12. /1972/. 462-473.
- [4] Gamkrelidze-Haratisvili: Differencialnaja igra uklonye-
nyija sz nyelinyejnüm upravlenyiem. Trudü Ordena Lenina
Mat. Inst. im. V.A. Szteklova A.N. SzSzSzR. 12.köt. 1971.
- [5] Gnoemskij, L.Sz.: K Zadacse Preszledovanyija. PMM. 26.
No.5., 960 /1962/.
- [6] R. Isaacs: Differential Games. Wilayland Sons Inc.,
New York-London-Sidney, 1965.
- [7] R. Isaacs: Some Fundamentals of Differential Games.
Megjelent 1 -ben.
- [8] Kraszovszkij, G.Sz., Szubbotin A.I.: Optimalnoe uklonye-
nyija v differencialnoj igre. Diff. Ur. 1968.4.No.12.2159.
- [9] Kraszovszkij, G.Sz.: Regularization of a Certain differen-
tial Game. Izv.A.N. SzSzSzR, Techn.Kib. 1969. No.1. 3-8.
- [10] Kraszovszkij, G.Sz., Szubbotin, A.I.: Ob optimalnij straté-
gii v linyejnom differencialnom igre. PMM.33.No.4.698.
/1969/.
- [11] Kraszovszkij, G.Sz., Szubbotin, A.I.: O strukture differen-
cialnüh igrach. DAN.190.No.3. /1970/.
- [12] Kraszovszkij, N.N.: Igrovie Zadacsi o Vsztrecse dvizsenyij.
Izd. Nauka. Moszkva.1970.

- [13] Kraszovszkij, N.N.: Kzadacse o preszledovanyije. DAN. 1970.191.No.2. 270-272.
- [14] Proceedings of Intern. Congr. Math. Nizza. 1970.
- [15] Kraszovszkij, N.N., Szubbotin, A.I.: O sztruktüre igrovüh zadacs dinamiki. PMM.35.No.1 /1971/.
- [16] Kraszovszkij, N.N., Szubbotin, A.I.: Pozicionnüe differen- cialnüe igri. Izd. NAUKA, Moszkva, 1974.
- [17] Kelendzseridze, D.L.: Ob odnom zadacse optimalnogo preszledovanyija. Avt. i. Telemekh. 23.No.8.1008./1962/.
- [18] Lagunov, V.N.: A nonlinear differential game of evasion. DAN.202.1972.
- [19] Miscsenko, E.F.: Zadacsi preszledovanyija i uklonyenyija ot vsztercsi v teorii differencialnüh igr. Izv. Akad. Nauk.SzSzSzR, Techn.Kibern. 1971.No.5.3-9.
- [20] Miscsenko, E.F., Szatimov, N.: Contact avoidance problem in differential games with nonlinear controls. Diff. Ur. 9./1973/. 1792-1797.
- [21] Nyikolszkij, M.Sz.: Nyesztacionarnüe linyejnüe differen- cialnüe igri. Vesztn. M.G.U. Szer.Mat.i. Mech.No.3.65/1969/
- [22] Nikolskij, M.Sz.: Puruit of an uncompletly known object. Vestn. M.G.U. Szcr.Mat.i. Mech. 26.1971.No.1. 3-8.
- [23] Nikolszkij, M.Sz.: Dynamical Pursuit games. Vestn.M.G.U. Ser.Mat.i.Mech. 27.1972.No.4.46-52.
- [24] Petroszjan, L.A.: Differencialnüe igri sz nyezaviszimümi dvzsenyijami. Litovszk. Mat. Szborny. 8.20.1968.
- [25] Petroszjan, L.A.: Ob oänom invariante v differencialnüh igrañ preszledovanyija. Vesztny.L.G.U.No.1.42.1968.

- [26] Petroszjan, L.A.: Differential games with incomplet information. DAN. 195. /1970/. 558-561.
- [27] Petroszjan, L.A.: Topological Games and their applications to pursuit problems. Vestny. L.G.U. 24. 1969. No. 19. 55-63.
- [28] Petrov, N.M.: O szuscsesztvovanyija znacsenyija igri preszledovanyija. DAN. 190. No. 6. /1970/.
- [29] Petrov, M.N.: The absence of the value of a pursuit game. Diff. Ur. 9. 1973. 860-867.
- [30] Pontrjagin, L.S.: O nyekotorüh differencialnüh igráh. 1964. DAN. 156. No. 4. 738-741.
- [31] Pontrjagin, L.S.: K teorii differencialnüh igr. 1966. U.M.N. 21. V. 4. 219-274.
- [32] Pontrjagin, L.S., Míscsenko, E.F.: Linyejnüe differencialnüe igri. DAN. 1967. 174. No. 1. 27-29.
- [33] Pontrjagin, L.S. O linyejnüh differencialnüh igráh /1/
DAN. 174. No. 1967.
O linyejnüh differencialnüh igráh /2/
DAN. 175. No. 4. 1967. 764.
- [34] Pontrjagin, L.S., Míscsenko, E.F.: Zadacsá ob ubeganyii odnogo upravljáemogo objekta ot drugovo. DAN. 189. 1969. 721-723.
- [35] Pontrjagin, L.S.: Linyejnaja differencialnaja igra ubeganyija. DAN. 1970. 191. No. 283-285.
- [36] Pontrjagin, L.S.: Linyejnaja differencialnaja igra ubeganyija. Trudü ordena Lenina Mat. Inst. Im. V.A. Szteklóva. A.N. SzSzSzR, T. 112-1971.

- [37] Pontrjagin, L.S., V.G. Boltjanskij, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mircsenko: Matematicheskaja teorija optimalnüh proceszszov. MIR. 1962.
- [38] Psenyicsnyij, V.N.: Linyejnue differencialnue igri. Avt. i Telemech. No. 1. 65. 1968.
- [39] Psenyicsnyij, V.N.: -strategies in differential games. Megjelent 1 -ben.
- [40] Sakawa Yoskiyuki: Solution of linear pursuit-evasion games. SIAM Control. 8. 1970. 101-112.
- [41] Smoljakov, E.R.: Differential Games in Mixed Strategies. DAN. 191. 1970. 39-42.
- [42] Szubbotin, A.I.: Differential games with constraints on the phase states. DAN. 193. 294-297. /1970/.
- [43] Subbotin A.I.: Program and position absorption in differential games. PMM. 36. /1972/, 740-743.
- [44] Varaiya, Pr.: On the existence of solution to a differential game. SIAM J. Contr., 5. No. 1. 153. /1967.
- [45] Varaiya, Pr.: Differential games with dynamical systems. Megjelent 51 -ben.
- [46] Zorea Torrel, Procopio: Existence of differential game with given value. Trabajos Estadist. 20. /1969/.
- [47] Yu, P.L.: Some fundamental qualifications of optimal strategies and transition surfaces in differential games. J. of Opt. Th. and Appl. 9. 1972. 399-425.
- [48] Blaquiere, A., Gerard, F., Leithman, G.: Qualitative and quantitative games. Academic Press, New York, London. 1969.

- [49] Varaiya, Pr., Jiguan Lin: Existence of saddle points in differential games. SIAM J. Contr. V.7.No.1.1969.
- [50] Proc. First Int. Conf. on Theory and Appl. of differential games, University of Massachusetts, Amherst, Sept. 1969.
- [51] Kuhn, Szegő: Differential games and related topics. North-Holland Publ. Company, Amsterdam, London. 1971.
- [52] Differential Games., Theory and applications. Symposium of the American Automatic Control Council, 1970. jun., 26. Georgia Inst. of Technology, Atlanta. Kiadó: The Am. Soc. of Mech. Engineers, New York, 1970.
- [53] Journal of optimization, Theory and Applications, 1974. Vol. 13.No.3. Differential games issue. Leitman és Ho.
- [54] M. Sz. Nyikolszkij: Ob odnom zadacse preszledovanyija sz nyepolnoj informaciej. Izv. Ak. N. SzSzSzR. Tech. Kib. 1971.No.5.10-13.
- [55] Journal of Optimization, Theory and Applications. 1976. Vol.18.No.1. Differential games issue.
- [56] Jozsida: Funkcionalnűj analiz. MIR. Moszkva 1967.
- [57] Cayley, J.: Obscsaja topologija. 1968. Moszkva Nauka.
- [58] Lakschmikantam, L., E. Leela: Differential and integral inequalities. Academic Press.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
A differenciáljátékok története.	9
0.§ Alapvető fogalmak.	30
1. Az N-személyes játékok.	30
2. Differenciáljátékok.	33
3. Differenciáljátékok osztályozása.	37
1.§ A fölény kérdése.	44
1. Fölény definíciók.	45
2. Lokális stratégiák fogalma.	52
2.§ A lokális stratégiák szintézise.	58
1. Elnyelési és taszítási pontok.	59
2. Szintézis probléma kompatibilis stratégiáknál	64
3. Szintézis nemszeparábilis tereken.	70
3.§ Alkalmazások.	77
1. Elfogási és elfutási alaptételek.	77
2. Elfutás-elfogás késleltetéssel és anélkül.	90
3. Elfogás és elfutás Hilbert térben konvex célhalma- zoktól.	96
4. Numerikus módszer.	100
Függelék.	102
F1. Borel mérhető leképezés megadása adott zárt hal- mazba eső grafikonnal.	102
F2. Differenciálegyenlőtlenségek.	106
1. Alapbecslés.	106
2. Konvex kupok.	107
F3. Parciális maximum/minimum függvények folytonossága	112
Irodalomjegyzék.	115



